

第6章 | 微分法と積分法



第1節 微分係数と導関数

1 微分係数

まとめ

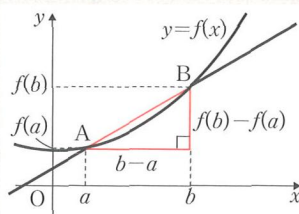
1 平均変化率

関数 $y=f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、

$$\frac{y \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を、 $x=a$ から $x=b$ までの、関数 $f(x)$ の平均変化率という。

この平均変化率は、関数 $y=f(x)$ のグラフ上の2点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ を通る直線 AB の傾きを表している。



2 極限值

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら、 a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、 α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の極限值という。このことを、次のように書く。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

注意 $\lim$ は極限を意味する英語 limit を略したものである。

3 微分係数, $f'(a)$

関数 $f(x)$ の、 $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において、 h が0に限りなく近づくとき、この平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば、その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 または変化率といい、 $f'(a)$ で表す。

4 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

5 接線

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする。

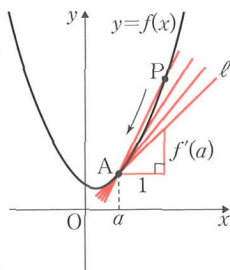
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 $A(a, f(a))$, $P(a+h, f(a+h))$ をとると, h が 0 に限りなく近づくとき, 点 P は点 A に限りなく近づく。

このとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

であるから, 直線 AP は図のような直線 ℓ に限りなく近づく。

この直線 ℓ を, 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A における 接線 といい, A を 接点 という。このとき, 直線 ℓ はこの曲線に点 A で 接する という。



6 接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは, 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

6 章

微分法と積分法

A 平均変化率

教 p.182

練習
1

次の平均変化率を求めよ。

- (1) 1 次関数 $y=2x$ の, $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率
- (2) 2 次関数 $y=-x^2$ の, $x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

指針 平均変化率 関数 $y=f(x)$ において, x の値が a から b まで変化するとき

$$\text{平均変化率} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \begin{array}{l} \cdots \cdots y \text{ の変化量} \\ \cdots \cdots x \text{ の変化量} \end{array}$$

解答 (1) $\frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$ 答

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{-(2+h)^2 - (-2^2)}{(2+h) - 2} &= \frac{-4 - 4h - h^2 + 4}{h} \\ &= \frac{-4h - h^2}{h} \\ &= \frac{h(-4-h)}{h} \\ &= -4 - h \quad \text{答} \end{aligned}$$

注意 (1) 一般に, 1 次関数 $y=mx+n$ の平均変化率は一定で, x の係数 m に等しい。
 x の値の変化の仕方には関係しない。

B 極限值

教 p.183

練習
2

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) \quad (3) \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2)$$

指針 極限值

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ は、 x が 2 に限りなく近づくとき、 $x^2 + 1$ が限りなく近づく値を表している。

(2) 同様に $\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h)$ は、 h が 0 に限りなく近づくとき、 $6 + h$ が限りなく近づく値を表している。

(3) $-6h$ と h^2 はどちらも 0 に限りなく近づく。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ 答

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$ 答

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2) = 12$ 答

C 微分係数

教 p.184

練習
3関数 $f(x) = 3x^2$ について、次の微分係数を求めよ。

$$(1) f'(1) \quad (2) f'(-2) \quad (3) f'(a)$$

指針 微分係数 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ とは $f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率において、 h が 0 に限りなく近づくときの極限値のことであり $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$f(x) = 3x^2$ として、(1) は $a=1$ 、(2) は $a=-2$ のときの微分係数をこの式にあてはめて求める。また、(3) は $f'(a)$ は a についての式になる。

解答 (1) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2h + 3 \cdot h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + 3h) = 6$ 答

(2) $f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h)^2 - 3 \cdot (-2)^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-4h) + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-12 + 3h) = -12$ 答

(3) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2ah + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a + 3h) = 6a$ 答

D 微分係数の図形的な意味

教 p.185

練習
4関数 $y=x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ。

(1) 点 (1, 1)

(2) 点 (-2, 4)

指針 接線の傾き 接点の x 座標に注目する。 $x=a$ のとき接線の傾きは $f'(a)$ に等しい。 $f(x)=x^2$ として、 $f'(1)$ 、 $f'(-2)$ を求める。

解答 $f(x)=x^2$ とする。

(1) 点 (1, 1) における接線の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} m=f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) 点 (-2, 4) における接線の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} m=f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4+h) = -4 \quad \text{答} \end{aligned}$$

微分係数は
接線の傾き
なんだね。

6
章

微分法と積分法

2 導関数とその計算

まとめ

1 導関数, $f'(x)$

関数 $f(x)$ において、 x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると、 x の関数が得られる。このようにして得られる新しい関数を $f(x)$ の 導関数 といい、 $f'(x)$ で表す。

2 導関数 $f'(x)$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、次の式で定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

【注意】 導関数 $f'(x)$ は、 $f'(a)$ を求めた式で、 a を x におき換えたものである。

なお、上の式において、 h を x の増分といい、関数 $y=f(x)$ の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を y の増分 という。 x の増分、 y の増分を、それぞれ Δx 、 Δy で表すことがある。この記号を用いると

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

3 $y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$

関数 $y=f(x)$ の導関数を, $y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$ などと表すこともある。

また, たとえば, 関数 $y=x^3$ を「関数 x^3 」のように x の式だけで表記することがある。このときは, 関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ で表す。

4 関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は $(x^n)'=nx^{n-1}$ n は正の整数

定数関数 c の導関数は $(c)'=0$

5 微分する

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを, $f(x)$ を x で微分する または単に 微分する という。

注意 今後, 関数 $f(x), g(x)$ は x の多項式で表される関数とする。

6 関数の定数倍および和, 差の導関数

k は定数とする。

$$1 \quad y=kf(x) \text{ を微分すると } y'=kf'(x)$$

$$2 \quad y=f(x)+g(x) \text{ を微分すると } y'=f'(x)+g'(x)$$

$$3 \quad y=f(x)-g(x) \text{ を微分すると } y'=f'(x)-g'(x)$$

7 変数が s, t の関数の導関数

たとえば, t の関数 $s=f(t)$ の導関数は $s', f'(t), \frac{ds}{dt}, \frac{d}{dt}f(t)$ などと表す。

注意 変数が x, y 以外の文字で表される関数についても, x と y の関数のときと同様に導関数を考える。 $\frac{ds}{dt}$ は t の関数 s を t で微分した導関数を表している。

A 導関数

教 p.187

練習
5

導関数の定義にしたがって, 次の関数の導関数を求めよ。

$$(1) f(x)=3x$$

$$(2) f(x)=-x^2$$

指針 導関数 $f'(x)$ 関数 $f(x)$ の, x から $x+h$ までの平均変化率において, h が 0 に限りなく近づくときの極限值である。

$$\begin{aligned} \text{解答 } (1) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)-3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.187

練習
6

教科書 187 ページの公式を用いて、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^4$

(2) $y = x^5$

指針 関数 x^n の導関数 関数 x^n の導関数を求める公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ にあてはめて計算する。

解答 (1) $y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$ 答

(2) $y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$ 答

B 関数の微分

教 p.189

練習
7

次の関数を微分せよ。

(1) $y = 4x^2 + 3x - 4$

(2) $y = -3x^2 + x - 2$

(3) $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$

(4) $y = -x^4 - x + 3$

(5) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

(6) $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

指針 関数の定数倍および和、差の導関数 教科書 p.189 の 2, 3 によれば、各項ごとに微分すればよいことがわかる。また、1 によれば係数はそのままよい。あとは、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 、 $(c)' = 0$ を使う。

解答 (1) $y' = (4x^2)' + (3x)' - (4)'$

← 和・差の微分 (2, 3)

$$= 4(x^2)' + 3(x)' - (4)'$$

← 定数倍の微分 (1)

$$= 4 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 = 8x + 3 \quad \text{答}$$

← $(x^n)' = nx^{n-1}$ 、 $(c)' = 0$ 、 $(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$

(2) $y' = -3(x^2)' + (x)' - (2)'$

$$= -3 \cdot 2x + 1 = -6x + 1 \quad \text{答}$$

(3) $y' = 4(x^3)' - 2(x^2)' - 5(x)'$

$$= 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 12x^2 - 4x - 5 \quad \text{答}$$

(4) $y' = -(x^4)' - (x)' + (3)' = -4x^3 - 1 \quad \text{答}$

(5) $y' = \frac{2}{3}(x^3)' + \frac{3}{4}(x^2)' - \frac{1}{2}(x)' = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{3}{4} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 1$

$$= 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

(6) $y' = -\frac{1}{2}(x^3)' + \frac{3}{2}(x^2)' + \left(\frac{1}{4}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x + 0$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 3x \quad \text{答}$$

6
章

微分法と積分法

練習
8

次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x+2)(x+3)$ (2) $y = x(x+2)(x-2)$

(3) $y = -2x(x+1)(x-3)$ (4) $y = 3(x^2-2)^2$

指針 関数の微分 右辺を展開・整理してから微分する。練習7と同様。

解答 (1) $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

よって $y = x^2 + 5x + 6$ したがって $y' = 2x + 5$ **答**

(2) $x(x+2)(x-2) = x(x^2-4) = x^3 - 4x$

よって $y = x^3 - 4x$ したがって $y' = 3x^2 - 4$ **答**

(3) $-2x(x+1)(x-3) = -2x(x^2-2x-3) = -2x^3 + 4x^2 + 6x$

よって $y = -2x^3 + 4x^2 + 6x$

したがって $y' = -6x^2 + 8x + 6$ **答**

(4) $3(x^2-2)^2 = 3(x^4-4x^2+4) = 3x^4 - 12x^2 + 12$

よって $y = 3x^4 - 12x^2 + 12$ したがって $y' = 12x^3 - 24x$ **答**

練習
9関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ について、次の x の値における微分係数を求めよ。

(1) $x = 2$

(2) $x = 0$

(3) $x = -2$

指針 微分係数(導関数の利用) 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ の導関数 $f'(x)$ を求めて、 x にそれぞれの値を代入して微分係数を求める。

解答 $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 - 6x$

(1) $x = 2$ における微分係数は $f'(2)$ であるから

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$$
 答

(2) $x = 0$ における微分係数は $f'(0)$ であるから $f'(0) = 0$ **答**

(3) $x = -2$ における微分係数は $f'(-2)$ であるから

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 24$$
 答

練習
10次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(0) = -3, \quad f'(1) = 1, \quad f(0) = 2$$

指針 導関数の利用と関数の決定 2次関数であるから $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ として、条件を定数 a, b, c の等式で表す。微分係数 $f'(0), f'(1)$ の計算は、 $f(x)$ を微分して導関数を求め、これを利用する。

解答 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ とすると $f'(x) = 2ax + b$

$$f'(0) = -3 \text{ から } b = -3$$

$$f'(1) = 1 \text{ から } 2a + b = 1$$

$$\text{これに } b = -3 \text{ を代入すると } 2a - 3 = 1$$

$$\text{これを解いて } a = 2 \quad \text{これは } a \neq 0 \text{ を満たす。}$$

$$f(0) = 2 \text{ から } c = 2$$

$$\text{したがって } f(x) = 2x^2 - 3x + 2 \quad \text{答}$$

C 変数が x, y でない場合の導関数

教 p.191

練習
11

次の t の関数を微分せよ。ただし, a, b は定数とする。

$$(1) \quad s = 3t^2 - 4t + 2$$

$$(2) \quad f(t) = at^3 + bt^2$$

指針 t の関数の微分 t を今までの x と考えて微分する。このとき, (2) の a, b は数と考えて微分する。

解答 (1) $s' = 3(t^2)' - 4(t)' + (2)' = 3 \cdot 2t - 4 = 6t - 4 \quad \text{答}$

(2) $f'(t) = a(t^3)' + b(t^2)' = a \cdot 3t^2 + b \cdot 2t = 3at^2 + 2bt \quad \text{答}$

練習
12

教 p.191

半径 r の球の体積を V , 表面積を S とすると, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$S = 4\pi r^2$ である。 V と S を r の関数とみて, それぞれ r で微分せよ。

指針 いろいろな関数の導関数 球の体積 V , 表面積 S は半径 r の関数である。導関数は V', S' で表してもよいが, $\frac{dV}{dr}, \frac{dS}{dr}$ と表すことによって, 変数 r で微分していることを明示できる。

解答 $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi (r^3)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2 \quad \text{答}$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi (r^2)' = 4\pi \cdot 2r = 8\pi r \quad \text{答}$$

変数が x 以外の文字でも同じように微分できるよ。



3 接線の方程式

まとめ

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

6
章

微分法と積分法

A 接線の方程式

教 p.192

練習
13

関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に x 座標が 2 である点 A をとる。
点 A における接線の方程式を求めよ。

指針 接線の方程式 p.261 のまとめの公式を利用する。関数 $y=f(x)$ のグラフの、 x 座標が a である点における接線の傾きは、すでに学習したように $f'(a)$ である。微分係数 $f'(a)$ は、導関数の利用で簡単に計算できる。

解答 $f(x)=2x^2-4x+3$ とすると、傾きは $f'(2)$ である。

$f(x)$ を微分すると $f'(x)=4x-4$

よって $f'(2)=4\cdot 2-4=4$

また $f(2)=2\cdot 2^2-4\cdot 2+3=3$

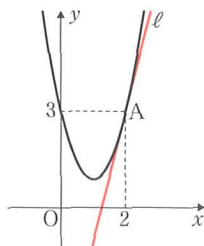
よって、点 A の座標は (2, 3) である。

したがって、求める接線は、点 (2, 3) を通り

傾きが 4 の直線である。

よって、求める方程式は

$$y-3=4(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y=4x-5 \quad \text{答}$$


 深
め
る

教 p.192

教科書の例題 4 の放物線 $y=-x^2+4x$ の頂点における接線の傾きを予想して、それが正しいかどうかを確かめてみよう。

解答 (例) 図をかいて考えると、放物線の頂点における接線は x 軸に平行な直線になるから、接線の傾きは 0 であると予想する。

実際に、 $f(x)=-x^2+4x$ とすると $f'(x)=-(x-2)^2+4$

放物線の頂点の座標は (2, 4) で、 $f'(x)=-2x+4$ より、放物線の頂点における接線の傾きは $f'(2)=0$ となり、予想は正しい。 答

B グラフ上にない点から引いた接線

教 p.193

練習
14

次の接線の方程式を求めよ。

(1) 関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 C(-1, -7) から引いた接線

(2) 関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフに原点 O から引いた接線

指針 グラフ上にない点から引いた接線 接点の x 座標を a とすると、 y 座標は x を a とおいた値になる。これらの座標で表された点における接線の方程式を求め、接線が、(1) 点 C, (2) 原点 O を通ることから a の値を求める。

解答 (1) $y=x^2+1$ を微分すると $y'=2x$

接点の座標を (a, a^2+1) とすると、接線の傾きは $2a$ 、その方程式は

$$y = (a^2+1) = 2a(x-a)$$

すなわち $y = 2ax - a^2 + 1$ …… ①

直線 ① が点 $C(-1, -7)$ を通るから $-7 = -2a - a^2 + 1$

よって $a^2 + 2a - 8 = 0$

すなわち $(a+4)(a-2) = 0$ $a = -4, 2$

接線の方程式は、① から

$a = -4$ のとき $y = -8x - 15$, $a = 2$ のとき $y = 4x - 3$ 答

(2) $y = x^2 - 2x + 4$ を微分すると $y' = 2x - 2$

接点の座標を $(a, a^2 - 2a + 4)$ とすると、接線の

傾きは $2a - 2$ となるから、その方程式は

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a)$$

すなわち $y = 2(a-1)x - a^2 + 4$ …… ①

この直線が原点 $O(0, 0)$ を通るから

$$0 = -a^2 + 4 \quad \text{よって} \quad a^2 - 4 = 0$$

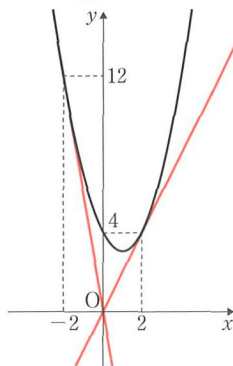
すなわち $(a+2)(a-2) = 0$

これを解いて $a = -2, 2$

したがって、接線の方程式は、① から

$a = -2$ のとき $y = -6x$

$a = 2$ のとき $y = 2x$ 答



6章

微分法と積分法

深める

教 p.193

放物線 $y=f(x)$ とその接線 $y=g(x)$ について、 $f(x)=g(x)$ を整理して得られる 2 次方程式は重解をもつ。このことを、教科書の応用例題 1 の放物線 $y=x^2+3$ とその 2 本の接線について、それぞれ確かめよう。

指針 放物線と直線が接する条件 応用例題 1 の結果から、 $f(x)=x^2+3$, $g(x)=-2x+2$ および $g(x)=6x-6$ とする。

放物線と直線が接する条件として、次のことが成り立つ。

$$\left[\begin{array}{l} \text{放物線 } y=f(x) \text{ と} \\ \text{直線 } y=g(x) \text{ が接する} \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \text{2 次方程式 } f(x)=g(x) \\ \text{が重解をもつ} \end{array} \right]$$

解答 $x^2+3=-2x+2$ とすると $x^2+2x+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4} = 1^2 - 1 \cdot 1 = 0$$

また、 $x^2+3=6x-6$ とすると $x^2-6x+9=0$

この 2 次方程式の判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot 9 = 0$$

よって、それぞれの2次方程式は重解をもつ。

参考 $x^2 + 3 = -2x + 2$ を解くと $x = -1$

$x^2 + 3 = 6x - 6$ を解くと $x = 3$

第6章 第1節

問題

教 p.194

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

指針 極限値 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は、 x が a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ が近づく値を調べる。

(1) x が 1 に近づくとき、 $x+2$ は 3 に近づく。

(2) x が 1 に近づく場合、 x は 1 とは異なる値であると約束されているから、

$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ の分母は 0 ではない。よって、 $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ はきちんとした値をも

つ式である。分子を因数分解して、分母と分子を約分して考える。

解答 (1) x が 1 に限りなく近づくとき、 $x+2$ は 3 に近づく。

よって $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ **答**

(2) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$

よって $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ **答**

教 p.194

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

(2) $y = (2x-1)(x+1)$

(3) $y = (x+1)(x^2 - x + 1)$

(4) $y = x(x-1)^2$

指針 関数の微分 導関数の性質により、多項式の各項ごとに微分すればよい。すなわち、 $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ について

$$y' = (ax^n)' + (bx^{n-1})' + \dots = a(x^n)' + b(x^{n-1})' + \dots$$

また、各項の微分について、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 、 $(c)' = 0$ を使う。

(2)~(4) では、まず右辺を展開・整理してから微分する。

解答 (1) $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

よって $y' = (1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)'$
 $= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ **答**

$$(2) \quad (2x-1)(x+1)=2x^2+x-1$$

$$\text{よって} \quad y=2x^2+x-1$$

$$y'=2 \cdot 2x+1=4x+1 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

$$\text{よって} \quad y=x^3+1$$

$$y'=3x^2 \quad \text{答}$$

$$(4) \quad x(x-1)^2=x(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x$$

$$\text{よって} \quad y=x^3-2x^2+x$$

$$y'=3x^2-2 \cdot 2x+1=3x^2-4x+1 \quad \text{答}$$

教 p.194

3 次のことを証明せよ。ただし、 a 、 b は定数とする。

$$(1) \quad y=(ax+b)^2 \text{ のとき} \quad y'=2a(ax+b)$$

$$(2) \quad y=(ax+b)^3 \text{ のとき} \quad y'=3a(ax+b)^2$$

指針 関数の微分の公式の証明 右辺を展開・整理してから微分する。

さらに、それを因数分解して、与えられた導関数の式と同じであることを示す。

解答 (1) $(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2$

$$\text{よって} \quad y=a^2x^2+2abx+b^2$$

$$\text{したがって} \quad y'=2a^2x+2ab$$

$$=2a(ax+b) \quad \text{終}$$

$$(2) \quad (ax+b)^3=(ax)^3+3(ax)^2b+3ax \cdot b^2+b^3$$

$$=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$$

$$\text{よって} \quad y=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$$

$$\text{したがって} \quad y'=3a^3x^2+3a^2b \cdot 2x+3ab^2$$

$$=3a^3x^2+6a^2bx+3ab^2$$

$$=3a(a^2x^2+2abx+b^2)$$

$$=3a(ax+b)^2 \quad \text{終}$$

注意 一般に、 $y=(ax+b)^n$ の導関数は

$$y'=n(ax+b)^{n-1}(ax+b)'$$

$$=na(ax+b)^{n-1}$$

$$\leftarrow (ax+b)'=a$$

教 p.194

4 次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(0)=-4, \quad f'(2)=0, \quad f(0)=8$$

指針 微分係数と関数の決定 2次関数であるから、 $f(x)=ax^2+bx+c$ として、条件を定数 a 、 b 、 c の等式で表す。

なお、微分係数の計算は、 $f(x)$ を微分して導関数 $f'(x)$ を求め、これを利用す

ればよい。

解答 $f(x)=ax^2+bx+c$ とすると $f'(x)=2ax+b$

$$f'(0)=-4 \text{ から } b=-4$$

$$f'(2)=0 \text{ から } 4a+b=0$$

$$\text{これに } b=-4 \text{ を代入すると } 4a-4=0$$

$$\text{これを解いて } a=1$$

$$f(0)=8 \text{ から } c=8$$

$$\text{よって } a=1, b=-4, c=8$$

$$\text{したがって, } f(x) \text{ は } f(x)=x^2-4x+8 \quad \text{答}$$

教 p.194

- 5 関数 $y=x^2-2x$ のグラフについて、傾きが 4 であるような接線の方程式を求めよ。

指針 **接線の方程式** 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線は、傾きが $f'(a)$ であり、その方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ である。まず、傾きが 4 であるときの a の値を求める。

解答 $y=x^2-2x$ を微分すると $y'=2x-2$

$f(x)=x^2-2x$ とおき、接点の座標を $(a, f(a))$ とする。

接線の傾きが 4 であるから、 $f'(a)=4$ より $2a-2=4$

$$\text{これを解くと } a=3$$

このとき $f(3)=3^2-2 \cdot 3=3$ であるから、接点の座標は $(3, 3)$

したがって、求める接線の方程式は

$$y-3=4(x-3)$$

$$\text{すなわち } y=4x-9 \quad \text{答}$$

教 p.194

- 6 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 $C(1, 2)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

指針 **グラフ上にない点から引いた接線** 接点の x 座標を a とすると、 y 座標は a^3+2 である。点 (a, a^3+2) における接線の方程式を求め、接線が点 C を通ることを式で表すと、 a の値が求められる。

解答 $y=x^3+2$ を微分すると $y'=3x^2$

接点の座標を (a, a^3+2) とすると、接線の方程式は

$$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$$

$$\text{すなわち } y=3a^2x-2a^3+2$$

この接線が点 $C(1, 2)$ を通るから

$$2=3a^2-2a^3+2$$

$$a^2(2a-3)=0$$

これを解くと $a=0, \frac{3}{2}$

よって、求める接線の方程式は $y=2, y=\frac{27}{4}x-\frac{19}{4}$ 答

教 p.194

7 関数 $f(x)=x^3-3x^2+5x$ とする。また、この関数の導関数を $g(x)$ とする。

- (1) 関数 $g(x)$ の最小値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ のグラフの接線のうち、傾きが最小である接線の方程式を求めよ。

指針 傾きが最小である接線 導関数の最小値が接線の傾きの最小値である。

解答 (1) $f'(x)=3x^2-6x+5$ から

$$g(x)=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$$

よって、関数 $g(x)$ は $x=1$ で最小値 2 をとる。 答

(2) (1) より、関数 $f(x)$ のグラフの接線の傾きの最小値は 2 である。

また $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1=3$

よって、求める接線の方程式は

$$y-3=2(x-1)$$

すなわち $y=2x+1$ 答

第2節 関数の値の変化

4 関数の増減と極大・極小

まとめ

1 関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

常に $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ はその区間で 増加 する。常に $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ はその区間で 減少 する。常に $f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ はその区間で 定数 である。

2 増減表

関数 $f(x)$ について, x の値の変化とそのときの $f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増加, 減少のようすを示した次のような表を 増減表 という。

x		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-2	↗

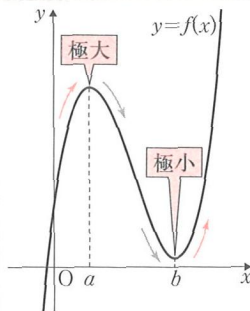
3 極大・極小

関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき, $f(x)$ は $x=a$ で 極大 であるといい, $f(a)$ を 極大値 という。また, $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき, $f(x)$ は $x=b$ で 極小 であるといい, $f(b)$ を 極小値 という。

4 極値

極大値と極小値をまとめて 極値 という。

5 極値と微分係数

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば, $f'(a)=0$ である。**注意** 逆は成り立たない。 $f'(a)=0$ であっても, $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない。

A 関数の増減と導関数

教 p.196

練習
15

次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

(2) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$

指針 関数の増減 まず $f'(x) = 0$ となる x の値を求め、その x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ、増減表を作る。

なお、関数が増加または減少する x の値の範囲には、 $f'(x) = 0$ となる x の値も含まれる。

解答 (1) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 4$$

$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲は

$$x < 0, 4 < x$$

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲は

$$0 < x < 4$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		0		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

したがって、 $f(x)$ は

$x \leq 0, 4 \leq x$ で増加し、 $0 \leq x \leq 4$ で減少する。 答

(2) $f'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x + 1)$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$x = -1, 0$$

$f'(x) > 0$ となる x の値の範囲は

$$-1 < x < 0$$

$f'(x) < 0$ となる x の値の範囲は

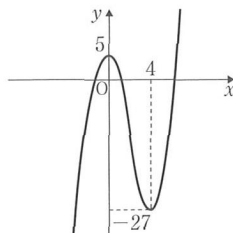
$$x < -1, 0 < x$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

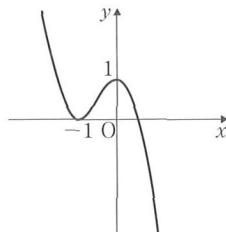
x		-1		0	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

したがって、 $f(x)$ は

$-1 \leq x \leq 0$ で増加し、 $x \leq -1, 0 \leq x$ で減少する。 答

6
章

微分法と積分法



B 関数の極大・極小

教 p.198

練習
16

次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

指針 3 次関数の極値とグラフ 関数の極値を求めたり、グラフをかいたりするためには、増減表を作って関数の増減を調べればよい。ただし、常に増加または減少する関数は、増減が入れかわらないから、極値をもたない。

なお、 $y=f(x)$ が 3 次関数の場合、一般に $f'(x)$ は 2 次式になるから、 $f'(x)=0$ となる x の値は 2 個以下である。つまり、極値が 3 つ以上になることはない。

解答 (1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 1, 3$$

y の増減表は次のようになる。

x		1		3	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

よって、この関数は

$$x=1 \text{ で極大値 } 4,$$

$$x=3 \text{ で極小値 } 0$$

をとる。 **答**

また、グラフは図のようになる。

(2) $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 2$$

y の増減表は次のようになる。

x		0		2	
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小 1	↗	極大 5	↘

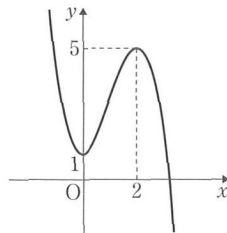
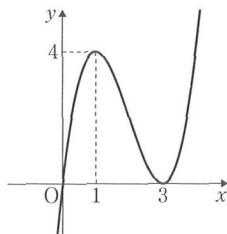
よって、この関数は

$$x=2 \text{ で極大値 } 5,$$

$$x=0 \text{ で極小値 } 1$$

をとる。 **答**

また、グラフは図のようになる。



練習
17

次の関数の増減を調べ、極値をもたないことを確かめよ。

(1) $f(x) = -x^3$

(2) $f(x) = x^3 + 2x$

指針 極値をもたない3次関数 関数が常に増加または常に減少するとき、増減が入れかわることはないから、関数は極値をもたない。

解答 (1) $f'(x) = -3x^2$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		0	
$f'(x)$	—	0	—
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

よって、 $f(x)$ は常に減少し、極値をもたない。 **終**

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

よって、 $f(x)$ は常に増加し、極値をもたない。 **終**

注意 $f'(a) = 0$ であっても $f(a)$ が極値とは限らない。すなわち、 $f'(a) = 0$ は、関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるための必要条件でしかない。

6
章

微分法と積分法

練習
18

次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

(3) $y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

(4) $y = x^4 - 4x^3 + 12$

指針 4次関数の極値とグラフ 関数の極値を求めたり、グラフをかいたりするためには、増減表を作って関数の増減を調べればよい。

なお、 $y = f(x)$ が4次関数の場合、一般に $f'(x)$ は3次式になるから、 $f'(x) = 0$ となる x の値は3個以下である。つまり、極値が4つ以上になることはない。

解答 (1) $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x-1)(x+2)$

$y' = 0$ とすると $x = -2, 0, 1$

y の増減表は次のようになる。

x		-2		0		1	
y'	—	0	+	0	—	0	+
y	$\searrow$	極小 -27	$\nearrow$	極大 5	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって、この関数は

$x=-2$ で極小値 -27 ,

$x=0$ で極大値 5 ,

$x=1$ で極小値 0

をとる。 答

また、グラフは図のようになる。

$$(2) \quad y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$$

$$= 4x(x+2)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -2, 0, 2$$

y の増減表は次のようになる。

x		-2		0		2	
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$\searrow$	極小 -14	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -14	$\nearrow$

よって、この関数は

$x=0$ で極大値 2 ,

$x=\pm 2$ で極小値 -14

をとる。 答

また、グラフは図のようになる。

$$(3) \quad y' = -4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x^2 - 3x + 2)$$

$$= -4x(x-1)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 1, 2$$

y の増減表は次のようになる。

x		0		1		2	
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$

よって、この関数は

$x=0, 2$ で極大値 0 ,

$x=1$ で極小値 -1

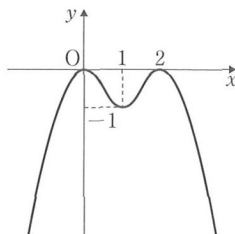
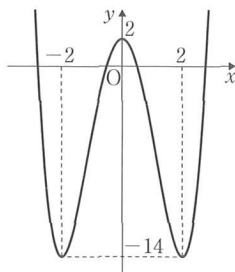
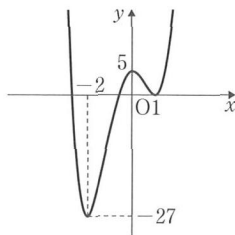
をとる。 答

また、グラフは図のようになる。

$$(4) \quad y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 3$$

y の増減表は次のようになる。



← $x=0$ の前後で y' の符号は
変わらないことに注意

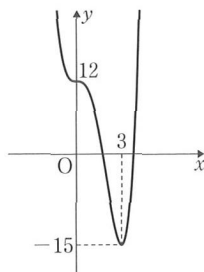
x		0		3	
y'	-	0	-	0	+
y	$\searrow$	12	$\searrow$	極小 -15	$\nearrow$

よって、この関数は

$x=3$ で極小値 -15

をとる。 答

また、グラフは図のようになる。



練習 19

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるように、定数 a , b の値を定めよ。また、極小値を求めよ。

教 p.200

指針 極大値から関数の決定 「 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\implies f'(a)=0$ 」を使う。
 $f(x)$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるとき、 $f'(-1)=0$ かつ $f(-1)=8$ が成り立つ。これを a , b の等式で表して解く。

なお、求めた a , b の値が条件に適していることを確かめるために、実際に関数の値の変化を調べることが必要である。

解答 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$
 $f(x)$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるとき

$$f'(-1)=0, \quad f(-1)=8$$

$$\text{よって} \quad 3 - 2a - 9 = 0, \quad -1 + a + 9 + b = 8$$

$$\text{これを解くと} \quad a = -3, \quad b = 3 \quad \text{答}$$

$$\text{このとき} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{ とすると} \quad x = -1, 3$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\text{よって} \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 3 = 8$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 3 = -24$$

となり、 $x = -1$ で極大値 8, $x = 3$ で極小値 -24 をとる。 答

6 章

微分法と積分法

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a - 6 = 0 \\ a + b = 0 \end{array} \right.$$

5 関数の増減・グラフの応用

まとめ

1 関数の最大・最小

関数の最大値、最小値を求めるには、関数の増減やグラフを利用する。極値と定義域の端における関数の値との大小も調べる必要がある。

2 方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数

関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数に等しい。

3 方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数

関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい。

4 不等式の証明

関数 $f(x)$ の最小値が 0 であるとき、不等式 $f(x) \geq 0$ が成り立つ。このことを利用して、不等式を証明する。

A 関数の最大・最小

教 p.202

練習
20

次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$(1) y=x^3+3x^2 \quad (-3 \leq x \leq 2) \quad (2) y=-x^3+x^2+x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$(3) y=x^4-2x^3+3 \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

指針 関数の最大・最小 増減表を作るとき、極値を与える x の値だけでなく、定義域の両端の x の値についても関数 y の値を調べ、それぞれの y の値の大小を比べる。増減表は定義域の分だけ作ればよい。

解答 (1) $y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$$y'=0 \text{ とすると } x=-2, 0$$

$-3 \leq x \leq 2$ において、 y の増減表は次のようになる。

x	-3		-2		0		2
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	20

よって、この関数は

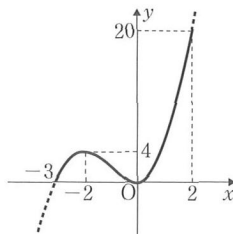
$x=2$ で最大値 20 をとり、

$x=-3, 0$ で最小値 0 をとる。 **答**

$$(2) y'=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$$

$$y'=0 \text{ とすると } x=-\frac{1}{3}, 1$$

$0 \leq x \leq 2$ において、 y の増減表は次のようになる。



x	0		1		2
y'		+	0	-	
y	0	↗	極大 1	↘	-2

よって、この関数は

$x=1$ で最大値 1 をとり、

$x=2$ で最小値 -2 をとる。 答

(3) $y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, \frac{3}{2}$

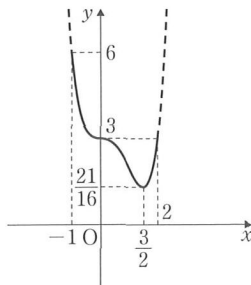
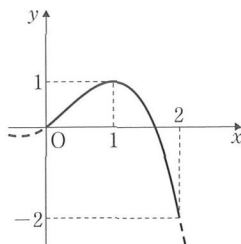
$-1 \leq x \leq 2$ において、 y の増減表は次のようになる。

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		2
y'		-	0	-	0	+	
y	6	↘	3	↘	極小 $\frac{21}{16}$	↗	3

よって、この関数は

$x=-1$ で最大値 6 をとり、

$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $\frac{21}{16}$ をとる。 答



6 章

微分法と積分法

深める

教 p.202

関数 $y = x^2 - 4x + 3$ の最小値を、次の 2 通りの方法で求めよう。

- ① 平方完成を利用する。 ② 微分して増減を調べる。

指針 2 次関数の最小値 2 次関数の最小値は、平方完成を利用して求めるのが一般的であるが、微分法を利用して求めることもできる。

解答 ① 関数の式を変形すると $y = (x-2)^2 - 1$

よって、この関数は $x=2$ で最小値 -1 をとる。 答

② $y' = 2x - 4$

$y' = 0$ とすると $x = 2$

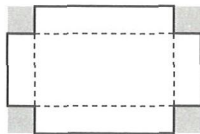
y の増減表は右のようになる。

よって、この関数は $x=2$ で最小値 -1 をとる。 答

x		2	
y'	-	0	+
y	↘	極小 -1	↗

練習
21

縦 10 cm, 横 16 cm の長方形の厚紙の四隅から, 合同な正方形を切り取り, ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには, 切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



教 p.203

指針 最大・最小の応用 求める長さを x cm, 箱の容積を y cm³ として, x の関数 y の増減を調べる。

x のとる値の範囲にも注意する。

解答 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm, このときの箱の容積を y cm³ とする。

$x > 0$, $10 - 2x > 0$ であるから

$$0 < x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき

$$y = x(10 - 2x)(16 - 2x)$$

$$= 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

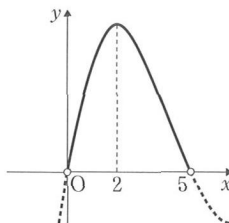
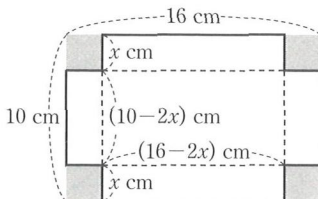
$$y' = 4(3x^2 - 26x + 40)$$

$$= 4(x - 2)(3x - 20)$$

① の範囲において, y の増減表は次のようになる。

x	0		2		5
y'		+	0	-	
y		↗	極大	↘	

よって, y は $x = 2$ で最大になる。 **答** 2 cm



注意 $16 - 2x > 10 - 2x$ から, $10 - 2x > 0$ であれば, $16 - 2x > 0$ は明らかである。

B 方程式への応用

練習
22

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^3 - 6x + 3 = 0$

(2) $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$

(3) $-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(4) $x^4 - 8x^2 + 1 = 0$

教 p.204

指針 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数 関数 $y = f(x)$ のグラフをかき, x 軸との共有点の個数を調べるとよい。

解答 (1) 関数 $y = 2x^3 - 6x + 3$ について

$$y' = 6x^2 - 6 = 6(x + 1)(x - 1)$$

$y'=0$ とすると $x=-1, 1$

y の増減表は次のようになる。

x		-1		1	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 7	↘	極小 -1	↗

よって、関数 $y=2x^3-6x+3$ のグラフは図のようになり、グラフと x 軸は異なる3点で交わる。

したがって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は 3 個 答

- (2) 関数 $y=x^3+3x^2+2$ について

$$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$y'=0$ とすると $x=-2, 0$

y の増減表は次のようになる。

x		-2		0	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 6	↘	極小 2	↗

よって、関数 $y=x^3+3x^2+2$ のグラフは図のようになり、グラフと x 軸は1点で交わる。

したがって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は 1 個 答

- (3) 関数 $y=-x^3+3x^2-4$ について

$$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

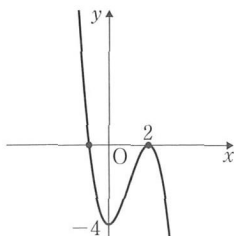
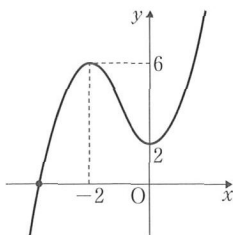
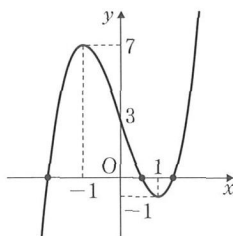
$y'=0$ とすると $x=0, 2$

y の増減表は次のようになる。

x		0		2	
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

よって、関数 $y=-x^3+3x^2-4$ のグラフは図のようになり、グラフと x 軸は1点で交わり1点で接する。

したがって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は 2 個 答



6 章

微分法と積分法

(4) 関数 $y=x^4-8x^2+1$ について

$$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$$

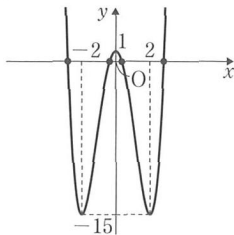
$$y'=0 \text{ とすると } x=-2, 0, 2$$

y の増減表は次のようになる。

x		-2		0		2	
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	極小 -15	↗	極大 1	↘	極小 -15	↗

よって、関数 $y=x^4-8x^2+1$ のグラフは図のようになり、グラフと x 軸は異なる4点で交わる。

したがって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は 4 個 答



練習
23

教 p.205

方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ がただ 1 個の実数解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 3 次方程式が 1 個の実数解をもつ条件 与えられた 3 次方程式は文字 a を含んでいるから、解を直接求めるのは大変である。方程式を $2x^3-3x^2=a$ と変形して、3 次関数のグラフと直線の共有点の個数の関係に帰着させる。すなわち、3 次方程式 $2x^3-3x^2=a$ の実数解の個数は、曲線 $y=2x^3-3x^2$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に等しいことを利用する。

解答 与えられた方程式を変形すると $2x^3-3x^2=a$

$$\text{関数 } y=2x^3-3x^2 \text{ について } y'=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$y'=0 \text{ とすると } x=0, 1$$

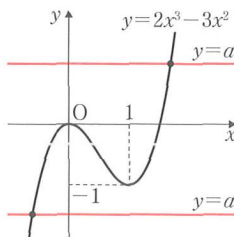
y の増減表は次のようになる。

x		0		1	
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

よって、 $y=2x^3-3x^2$ のグラフは、図のようになる。

求める a の値の範囲は、このグラフと直線 $y=a$ が 1 個の共有点をもつ範囲であるから

$$a < -1, 0 < a \quad \text{答}$$



C 不等式への応用

教 p.206

練習
24 $x \geq 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$$

指針 不等式の証明 $x \geq 0$ のとき、関数 $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 5) - 9x$ の最小値が 0 であることを示せばよい。

解答 $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 5) - 9x$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$= 3(x-1)(x+3)$$

$x \geq 0$ において、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	1	……
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	↘	極小 0	↗

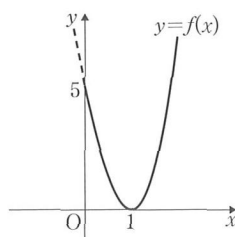
よって、 $x \geq 0$ において、 $f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる。

したがって、 $x \geq 0$ のとき、 $f(x) \geq 0$ であるから

$$(x^3 + 3x^2 + 5) - 9x \geq 0$$

すなわち $x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$

等号が成り立つのは、 $x=1$ のときである。 終

6
章

微分法と積分法

第6章 第2節

問題

教 p.207

8 次の関数の増減を調べ、極値があればその極値を求めよ。

(1) $y = x^3 - 6x + 2$

(2) $y = (1-x)^3$

(3) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

指針 関数の増減と極値 $y' = 0$ となる x の値をもとにして増減表を作る。

(1) はその値が無理数であるが、考え方はこれまでと変わりはない。

(2), (3) では、 $y' = 0$ であってもそこで極値をとるとは限らないことに注意する。

解答 (1) $y' = 3x^2 - 6$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

y の増減表は次のようになる。

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大 $2+4\sqrt{2}$	$\searrow$	極小 $2-4\sqrt{2}$	$\nearrow$

$$x = -\sqrt{2} \text{ のとき } y = (-\sqrt{2})^3 - 6 \cdot (-\sqrt{2}) + 2 = 2 + 4\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } y = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2}$$

であるから, y は

$$x = -\sqrt{2} \text{ で極大値 } 2+4\sqrt{2},$$

$$x = \sqrt{2} \text{ で極小値 } 2-4\sqrt{2} \text{ をとる。} \quad \text{答}$$

$$(2) \quad (1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$$

$$\text{よって } y = 1-3x+3x^2-x^3$$

$$\text{したがって } y' = -3+6x-3x^2$$

$$= -3(x-1)^2 \leq 0$$

y の増減表は次のようになる。

x		1	
y'	-	0	-
y	$\searrow$	0	$\searrow$

答 極値なし

$$(3) \quad y' = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -\frac{3}{2}, 0$$

y の増減表は次のようになる。

x		$-\frac{3}{2}$		0	
y'	-	0	+	0	+
y	$\searrow$	極小 $-\frac{11}{16}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ のとき } y = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 1 = -\frac{11}{16}$$

であるから, y は

$$x = -\frac{3}{2} \text{ で極小値 } -\frac{11}{16}$$

をとる。 答

教 p.207

- 9 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が, $x = -3$ で極大値をとり, $x = 1$ で極小値 -12 をとるように, 定数 a, b, c の値を定めよ。

指針 極値から関数の決定 「関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\implies f'(a)=0$ 」を使う。

$f(x)$ が $x=-3$ で極大値をとるとき $f'(-3)=0$

また、 $x=1$ で極小値 -12 をとるとき $f'(1)=0$ かつ $f(1)=-12$

これらを a, b, c の等式で表す。

解答 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f(x)$ が $x=-3$ で極大値をとるとき

$$f'(-3)=0$$

また、 $x=1$ で極小値 -12 をとるとき

$$f'(1)=0, \quad f(1)=-12$$

よって $27-6a+b=0, \quad 3+2a+b=0, \quad 1+a+b+c=-12$

これを解くと $a=3, \quad b=-9, \quad c=-7$

このとき

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-7$$

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

したがって、次の増減表が得られ、問題に適する。

x		-3		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		極大 20		極小 -12	

答 $a=3, \quad b=-9, \quad c=-7$

注意 $f'(-3)=0, f'(1)=0$ は $f(x)$ が極値をとるための必要条件である。したがって、これらをもとにして得た a, b, c の値については、問題に適していることを確かめておく。

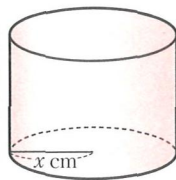
6章

微分法と積分法

教 p.207

10 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱の体積を $V\text{cm}^3$ とする。

- (1) 底面の半径を $x\text{cm}$ とするとき、 V を x の式で表せ。
- (2) V が最大となるのは、円柱の高さが何 cm のときか。



指針 最大・最小の応用

- (1) 直径は $2x\text{cm}$ であるから、高さは $(18-2x)\text{cm}$ と表される。
- (2) x のとる値の範囲にも注意して増減表を作る。

解答 (1) 底面の半径を $x\text{cm}$ とすると、高さは $(18-2x)\text{cm}$ と表される。

$x > 0$, $18 - 2x > 0$ であるから

$$0 < x < 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

体積は $V = \pi x^2(18 - 2x)$ ($0 < x < 9$) 答

← 底面積 × 高さ

$$(2) \pi x^2(18 - 2x) = -2\pi x^3 + 18\pi x^2$$

$$\text{よって} \quad V = -2\pi x^3 + 18\pi x^2$$

$$V' = -6\pi x^2 + 36\pi x = -6\pi x(x - 6)$$

① の範囲において、 V の増減表は次のようになる。

x	0		6		9
V'		+	0	-	
V		↗	極大	↘	

したがって、 V は $x = 6$ で最大となる。

このとき、円柱の高さは

$$18 - 2 \cdot 6 = 6 \text{ (cm)} \quad \text{答} \quad 6 \text{ cm}$$

教 p.207

11 方程式 $x^3 - 6x^2 + a = 0$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 3 次方程式の解の判別とグラフ 方程式 $x^3 - 6x^2 + a = 0$ の解の個数は、 $y = x^3 - 6x^2 + a$ のグラフと x 軸の共有点の個数と一致する。ここでは、方程式を $-x^3 + 6x^2 = a$ と変形し、 $y = -x^3 + 6x^2$ のグラフと直線 $y = a$ が x 軸の正の部分で 2 個、負の部分で 1 個の共有点をもつ条件を求める。

解答 与えられた方程式を変形すると $-x^3 + 6x^2 = a$

この方程式が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつのは、3 次関数

$$y = -x^3 + 6x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

のグラフと直線 $y = a$ とが、 $x > 0$ で 2 個、 $x < 0$ で 1 個の共有点をもつときである。

関数 ① を微分すると

$$y' = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$$

$$y' = 0 \text{ とすると} \quad x = 0, 4$$

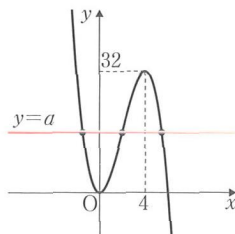
y の増減表は次のようになる。

x		0		4	
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小 0	↗	極大 32	↘

よって、関数 ① のグラフは右の図のようになる。

したがって、求める a の範囲は、図から

$$0 < a < 32 \quad \text{答}$$



別解 関数 $y=x^3-6x^2+a$ について

$$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$$

y の増減表は次のようになる。

x		0		4	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 a	↘	極小 $a-32$	↗

$$\text{極大値は } 0^3-6\cdot 0^2+a=a$$

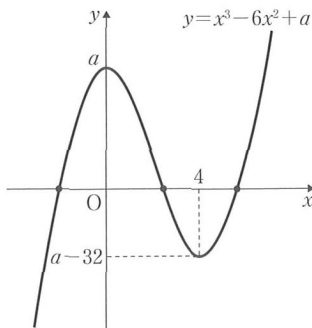
$$\text{極小値は } 4^3-6\cdot 4^2+a=a-32$$

よって、 $y=x^3-6x^2+a$ のグラフは図のようになる。

求める条件は、このグラフが x 軸の正の部分で2個、負の部分で1個の共有点をもつ条件であるから

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad a-32<0$$

したがって $0<a<32$ **答**



教 p.207

- 12** 関数 $f(x)=x^3-ax^2+(1-2a)x+4$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

指針 関数が極大値と極小値をもつ条件 関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば、 $f'(a)=0$ であるが、逆は成り立たない。すなわち、 $f'(a)=0$ であっても、 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない。

$f'(c)=0$ となる $x=c$ の前後で $f'(x)$ の値の符号が変われば、 $f(x)$ は $x=c$ で極値をとる。

$f'(x)=0$ は2次方程式であるから、判別式を利用して考える。

解答 $f(x)=x^3-ax^2+(1-2a)x+4$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2ax+(1-2a)$$

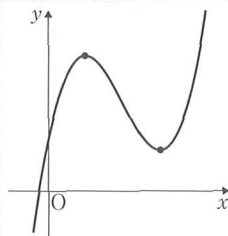
$f'(x)$ の符号が変わるのは、 $f'(x)=0$ となる異なる2つの実数 x の値があるときであるから、2次方程式 $3x^2-2ax+(1-2a)=0$ の判別式 D について、 $D>0$ となればよい。

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(1-2a)=a^2+6a-3$$

$a^2+6a-3>0$ を解くと

$$a<-3-2\sqrt{3}, \quad -3+2\sqrt{3}<a \quad \text{答}$$

13 3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフが右の図のようになるとき、 a, b, c, d の値の符号をそれぞれ求めよ。ただし、図中の黒丸は極値をとる点を表している。



指針 3次関数のグラフと係数の符号 グラフと y 軸の交点に着目する。また、グラフより極値は2つあり、極値をとる x の値の符号は2つとも正であるから、2次方程式 $y'=0$ は異なる2つの正の実数解をもつ。

解答 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

$$\begin{aligned}\text{このとき } f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ &= 3a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{b^2}{3a} + c\end{aligned}$$

グラフと y 軸の交点の y 座標が正であるから

$$f(0) > 0 \quad \text{すなわち} \quad d > 0$$

また、グラフより $y=f(x)$ の $x=0$ における接線の傾きは正であるから

$$f'(0) > 0 \quad \text{すなわち} \quad c > 0$$

さらに、グラフより $f(x)$ は極値を2つもち、極値をとる x の値の符号はどちらも正である。

よって、方程式 $f'(x)=0$ を満たす実数 x は2つあり、それらを α, β ($0 < \alpha < \beta$) とすると、グラフより $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		α		β	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表と $\alpha > 0, \beta > 0$ より、 $y=f'(x)$ のグラフは右の図のような、下に凸の放物線となるから $a > 0$

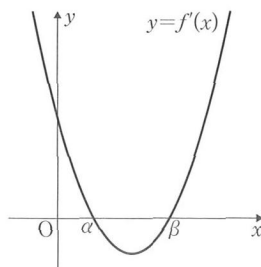
放物線 $y=f'(x)$ の軸は直線 $x = -\frac{b}{3a}$ で、 y 軸

の右側にあるから $-\frac{b}{3a} > 0$

ここで $a > 0$ であるから $b < 0$

以上より、それぞれの符号は

a : 正, b : 負, c : 正, d : 正 **答**



第3節 積分法

6 不定積分

まとめ

1 原始関数

x で微分すると $f(x)$ になる関数を、 $f(x)$ の 原始関数 という。

すなわち、 $F'(x)=f(x)$ のとき、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。

2 不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると、 $f(x)$ の任意の原始関数は、「 $F(x)+\text{定数}$ 」の形に表される。

この定数を 積分定数 といい、記号 C で表して、 $f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)+C$ (ただし C は定数) と表示する。

この表示を $f(x)$ の 不定積分 といい、 $\int f(x)dx$ で表す。

注意 不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある。

$\int$ は「積分」または「インテグラル」と読む。

3 関数 $f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad C \text{ は積分定数}$$

注意 今後、教科書と同様に、本書でも「 C は積分定数」の断りを省略する。

4 積分する

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を 積分する という。積分することと微分することとは、互いに逆の計算であるといえる。

5 関数 x^n の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

ただし、 n は 0 または正の整数とする。

例 $\int 1 dx = x + C, \quad \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

微分する
積分する

6 関数の定数倍および和、差の不定積分

$F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)$ のとき

1 $\int k f(x) dx = k F(x) + C \quad k \text{ は定数}$

2 $\int \{f(x) + g(x)\} dx = F(x) + G(x) + C$

3 $\int \{f(x) - g(x)\} dx = F(x) - G(x) + C$

6章

微分法と積分法

7 いろいろな関数の不定積分

変数が x でない関数についても、同様に不定積分を考える。

例 t の関数については、次のようになる。

$$\int 1 dt = t + C, \quad \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C, \quad \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$$

A 導関数と不定積分

教 p.208

練習
25

次の中から、 $3x^2$ の原始関数であるものを選び。

- ① $6x$ ② x^3 ③ $x^3 + 2x$ ④ $x^3 - 4$

指針 原始関数 微分すると $3x^2$ になる関数を選ぶ。

- 解答 ① $(6x)' = 6$ ② $(x^3)' = 3x^2$
③ $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$ ④ $(x^3 - 4)' = 3x^2$

よって、 $3x^2$ の原始関数は ②, ④ 答

注意 $3x^2$ の原始関数はいくつもあるが、それらの違いは、定数部分だけである。
 c が定数のとき $(x^3 + c)' = 3x^2$

教 p.209

練習
26

教科書 209 ページの公式が成り立つことを、右辺の関数を x で微分して確かめよ。また、この公式を用いて、不定積分 $\int x^3 dx$ を求めよ。

指針 x^n の不定積分 微分と積分は互いに逆演算である。すなわち、 $F(x)$ を微分すると $f(x)$ になるとき、 $f(x)$ の 1 つの不定積分は $F(x)$ である。このことを利用して考える。

解答 n が 0 または正の整数のとき、 $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ とおくと

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n$$

よって、 x^n の不定積分の 1 つは $F(x)$ である。

したがって $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ (C は積分定数) 終

また $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$ (C は積分定数) 答

B 不定積分の性質

教 p.210

練習
27

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int 5x^2 dx \qquad (2) \int (x^2 + x - 1) dx$$

$$(3) \int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx \qquad (4) \int (-2x^2 - x + 7) dx$$

指針 不定積分を求める 多項式は各項ごとに不定積分を考えればよい。また、各項は係数はそのまま残し、 x^n の不定積分との積にする。

答えは、微分してもとの関数に戻るかを確かめておく。

解答 C は積分定数とする。

$$(1) \int 5x^2 dx = 5 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{5}{3} x^3 + C \quad \text{答} \qquad \leftarrow \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$(2) \int (x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - x + C \quad \text{答} \qquad \leftarrow \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$(3) \int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx \qquad \int 1 dx = x + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 - 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 5x + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C \quad \text{答}$$

$$(4) \int (-2x^2 - x + 7) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 7x + C$$

$$= -\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 7x + C \quad \text{答}$$

6
章

微分法と積分法

練習
28

教 p.211

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (t+2)(3t-1) dt \qquad (2) \int 3(t-1)^2 dt$$

指針 いろいろな関数の不定積分を求める 不定積分は、変数が x 以外でも同様に考える。まず、積分する関数の式を展開して t の多項式の形にし、各項ごとに不定積分を計算すればよい。

解答 C は積分定数とする。

$$(1) \int (t+2)(3t-1) dt = \int (3t^2 + 5t - 2) dt$$

$$= 3 \cdot \frac{t^3}{3} + 5 \cdot \frac{t^2}{2} - 2t + C$$

$$= t^3 + \frac{5}{2} t^2 - 2t + C \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int 3(t-1)^2 dt &= \int 3(t^2 - 2t + 1) dt = \int (3t^2 - 6t + 3) dt \\
 &= 3 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t + C \\
 &= t^3 - 3t^2 + 3t + C \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.211

練習
29次の2つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

[1] $F'(x) = 3x^2 - 4$

[2] $F(-1) = 5$

指針 原始関数を求める [1] から $3x^2 - 4$ の不定積分として $F(x)$ を求める。さらに、[2] から積分定数 C の値を決める。

解答 [1] から $F(x) = \int (3x^2 - 4) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4x + C = x^3 - 4x + C$ (C は積分定数)

よって $F(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + C = 3 + C$

[2] より $3 + C = 5$ であるから $C = 2$

したがって $F(x) = x^3 - 4x + 2$ 答

7 定積分

まとめ

1 定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし、 a, b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とすると、 $F(b) - F(a)$ の値は $F(x)$ の選び方とは関係なく、 a, b の値だけで定まる。この $F(b) - F(a)$ を、関数 $f(x)$ の a から b までの定積分といい、

$\int_a^b f(x) dx$ と書く。このとき、 a を $\overset{a}{\text{下}}\text{端}$ 、 b を $\overset{b}{\text{上}}\text{端}$ という。また、この定

積分を求めることを、関数 $f(x)$ を a から b まで積分するという。 a と b の大小関係は、 $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれでもよい。また、 $F(b) - F(a)$ を

$\left[F(x) \right]_a^b$ とも書く。

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

2 関数の定数倍および和、差の定積分

$$1 \quad \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \text{ は定数}$$

$$2 \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$3 \quad \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

3 定積分の性質

定積分の上端, 下端に関する性質として, 次のことが成り立つ。

$$1 \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \qquad 2 \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

$$3 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

注意 性質3は, a, b, c の大小に関係なく成り立つ。

4 定積分と導関数

a を定数とするとき

x の関数 $\int_a^x f(t) dt$ の導関数は $f(x)$ である。

$$\text{すなわち} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

注意 x の関数 $\int_a^x f(t) dt$ の導関数を $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$ で表す。

A 定積分

練習
30

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 x dx \qquad (2) \int_{-1}^2 x^2 dx \qquad (3) \int_{-2}^1 x^3 dx \qquad (4) \int_3^0 2 dx$$

指針 定積分の計算 手順は

- ① 与えられた関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求める。ただし, 積分定数 C は省いてよい。

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = \overset{\text{①}}{\underbrace{F(b)}} - \overset{\text{②}}{\underbrace{F(a)}}$$

- ② 代入計算をする。

解答 (1) $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ であるから

$$\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 \quad \text{答}$$

(2) $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ であるから

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3 \quad \text{答}$$

(3) $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$ であるから

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4} \quad \text{答}$$

(4) $(2x)' = 2$ であるから

$$\int_3^0 2dx = \left[2x \right]_3^0 = 2(0-3) = -6 \quad \text{答}$$

注意 たとえば (1) $\int_1^3 xdx = \left[\frac{x^2}{2} + C \right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2} + C \right) - \left(\frac{1^2}{2} + C \right) = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$ のように、積分定数 C とは無関係に定積分の値が定まる。

練習
31

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^2 (x^2 + 4x - 5)dx \qquad (2) \int_2^3 (x-2)(x-3)dx$$

$$(3) \int_{-1}^2 (-t^3 + 2t)dt \qquad (4) \int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt$$

指針 定積分の計算 (2), (4) まず関数の式を展開する。

(3), (4) 変数を表す文字が違うだけの定積分の値は等しい。たとえば、

$$(3) \text{ の } \int_{-1}^2 (-t^3 + 2t)dt \text{ は } \int_{-1}^2 (-x^3 + 2x)dx \text{ と同じ。}$$

解答 (1) $\int_0^2 (x^2 + 4x - 5)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^2$
 $= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \right) - 0 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \quad \text{答}$

(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3)dx = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3$
 $= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right)$
 $= \left(9 - \frac{45}{2} + 18 \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 + 12 \right) = \frac{9}{2} - \frac{14}{3} = -\frac{1}{6} \quad \text{答}$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3 + 2t)dt = \left[-\frac{t^4}{4} + t^2 \right]_{-1}^2$
 $= \left(-\frac{2^4}{4} + 2^2 \right) - \left\{ -\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^2 \right\}$
 $= (-4 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = -\frac{3}{4} \quad \text{答}$

(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt = \int_{-2}^2 (t^3 + 4t^2 + 4t)dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 \right]_{-2}^2$
 $= \left(\frac{2^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 \right) - \left\{ \frac{(-2)^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 \right\}$
 $= \left(4 + \frac{32}{3} + 8 \right) - \left(4 - \frac{32}{3} + 8 \right) = \frac{64}{3} \quad \text{答}$

B 定積分の性質

教 p.214

練習
32

次の定積分を求めよ。

$$\int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx$$

指針 関数の定数倍および和、差の定積分 多項式の定積分は、各項ごとに定積分を考えてもよい。定数倍された関数では、その定数を $\int$ の前に出すことができる。

解答
$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx &= \int_1^3 x^3 dx - 3 \int_1^3 x dx + 2 \int_1^3 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 - 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 + 2 \left[x \right]_1^3 \\ &= \frac{3^4 - 1^4}{4} - \frac{3(3^2 - 1^2)}{2} + 2(3 - 1) \\ &= 20 - 12 + 4 = 12 \quad \text{答} \end{aligned}$$
← 公式 2, 1

6
章

微分法と積分法

練習
33

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx$$

指針 関数の定数倍および和、差の定積分の応用 教科書 p.214 の公式 3 を右辺から左辺を導く形で使う。この利用法では、いくつかの定積分の上端、下端がそれぞれ等しいことが前提となる。

解答
$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \{(x+2)^2 - (x-2)^2\} dx = \int_{-1}^1 8x dx \\ &= \left[4x^2 \right]_{-1}^1 = 4\{1^2 - (-1)^2\} = 0 \quad \text{答} \end{aligned}$$
← 公式 3

練習
34

教科書 215 ページの定積分の性質 1, 2 を証明せよ。

教 p.215

指針 定積分の性質の証明 性質 1 は、 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ として証明する。性質 2 は性質 3 (教科書で証明済み) を利用する。

解答 【性質 1 の証明】

$F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^a f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^a = F(a) - F(a) = 0 \quad \text{終}$$

【性質 2 の証明】

$$\text{性質 3 より} \quad \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx$$

$$\text{性質 1 より右辺は 0 であるから} \quad \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$$

$$\text{よって} \quad \int_a^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{終}$$

練習
35

教 p.216

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^2 (3x^2 - 4x)dx + \int_2^3 (3x^2 - 4x)dx$$

$$(2) \int_0^3 (x^2 + 2x)dx - \int_1^3 (x^2 + 2x)dx$$

指針 定積分の計算 上端、下端に注目し、教科書 p.215 の定積分の性質 3 を利用する。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad (1) \quad & \int_1^2 (3x^2 - 4x)dx + \int_2^3 (3x^2 - 4x)dx = \int_1^3 (3x^2 - 4x)dx \\ & = \left[x^3 - 2x^2 \right]_1^3 = (3^3 - 2 \cdot 3^2) - (1^3 - 2 \cdot 1^2) = 10 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_0^3 (x^2 + 2x)dx - \int_1^3 (x^2 + 2x)dx = \int_0^3 (x^2 + 2x)dx - \int_3^1 (x^2 + 2x)dx \\ & = \int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
36

教 p.216

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1) f(x) = 4x + 2 \int_0^2 f(t)dt \quad (2) f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

指針 定積分を含む関数の決定 $\int_0^2 f(t)dt$, $\int_{-1}^1 f(t)dt$ は定数である。たとえば (1) で a を定数として $\int_0^2 f(t)dt = a$ とおくと $f(x) = 4x + 2a$ となり、さらに x を t で置き換えると $f(t) = 4t + 2a$ が得られる。

$$\text{解答} \quad (1) \quad \int_0^2 f(t)dt = a \text{ とおくと} \quad f(x) = 4x + 2a$$

$$\text{よって} \quad \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (4t + 2a)dt = \left[2t^2 + 2at \right]_0^2 = 8 + 4a$$

$$8 + 4a = a \text{ であるから} \quad a = -\frac{8}{3} \quad \text{すなわち} \quad f(x) = 4x - \frac{16}{3} \quad \text{答}$$

$$(2) \int_{-1}^1 f(t)dt = a \text{ とおくと } f(x) = 3x^2 + a$$

$$\text{よって } \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 (3t^2 + a)dt = \left[t^3 + at \right]_{-1}^1 = 2 + 2a$$

$$2 + 2a = a \text{ であるから } a = -2 \text{ すなわち } f(x) = 3x^2 - 2 \quad \text{答}$$

教 p.217

練習

37

x の関数 $\int_0^x (3t^2 - 2t - 1)dt$ の導関数を求めよ。

指針 定積分で表された関数の微分 定積分を計算しなくても、教科書 p.217 の公式により求めることができる。

解答 $\frac{d}{dx} \int_0^x (3t^2 - 2t - 1)dt = 3x^2 - 2x - 1 \quad \text{答}$

教 p.217

練習

38

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - x - 2$$

指針 定積分と導関数 (関数の決定) 等式の両辺の関数を x で微分すると、左辺は $f(x)$ となる。また、与えられた等式で $x=a$ とおくと、p.289 のまとめの性質 1 が利用できる。

解答 等式の両辺の関数を x で微分すると $f(x) = 2x - 1$
 また、与えられた等式で $x=a$ とおくと、左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2 \quad \text{これを解くと } a = -1, 2$$

答 $f(x) = 2x - 1, a = -1, 2$

6
章

微分法と積分法

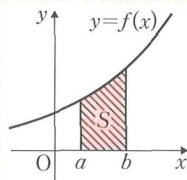
8 定積分と面積

まとめ

1 定積分と面積(1)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

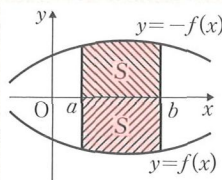
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



2 定積分と面積(2)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx$$



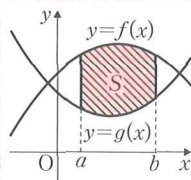
解説 x 軸に関して対称な図形を考えると, その面積は S と等しい。

$y=-f(x) \geq 0$ であるから, 「定積分と面積(1)」と同様に考えられる。

3 定積分と面積(3)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq g(x)$ のとき, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

4 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積の和

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分がいくつかの部分に分かれるときは, 次の手順にしたがって面積の和を求める。

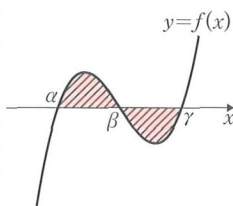
[1] $y=f(x)$ のグラフの概形をかき, x 軸との交点の x 座標を求める。

[2] $f(x) \geq 0$ の部分と $f(x) \leq 0$ の部分に分けて, 面積の和を求める。

たとえば, $y=f(x)$ のグラフが右上の図のようになるとき,

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ で } f(x) \geq 0, \quad \beta \leq x \leq \gamma \text{ で } f(x) \leq 0$$

求める面積の和 S は
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} \{-f(x)\} dx$$



5 絶対値を含む関数のグラフと面積の和

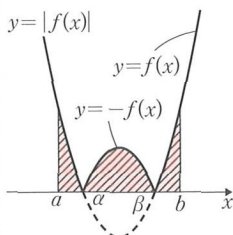
曲線 $y=|f(x)|$ と x 軸で囲まれた部分などの面積の和 S は、次の手順で求めるとよい。

[1] $y=f(x)$ のグラフの概形をかき、 x 軸との交点の x 座標を求める。

[2] $y=|f(x)|$ のグラフは、 $y=f(x)$ のグラフの x 軸より下側の部分 ($f(x) \leq 0$ の部分) を折り返したものであるから、 $f(x) \geq 0$ の部分と $f(x) \leq 0$ の部分に分けて、面積の和 S を求める。

たとえば、右上の図のときは

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^a f(x) dx + \int_a^\beta \{-f(x)\} dx + \int_\beta^b f(x) dx$$



A 定積分の図形的な意味

B 曲線と x 軸の間の面積

教 p.220

練習
39

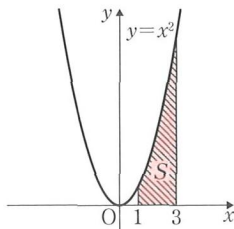
次の放物線と2直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$, 2直線 $x=1$, $x=3$

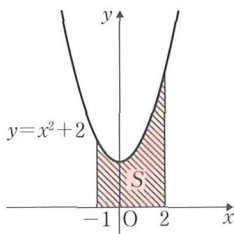
(2) 放物線 $y=x^2+2$, 2直線 $x=-1$, $x=2$

指針 定積分と図形の面積 (1) $y=x^2 \geq 0$, $y=x^2+2 > 0$ であるから、まとめの公式を使う。面積はそれぞれ1から3までの定積分、-1から2までの定積分で求めることができる。

解答 (1) $S = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3$
 $= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$ 答



(2) $S = \int_{-1}^2 (x^2+2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2$
 $= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right) - \left\{ \frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) \right\}$
 $= \left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 \right) = 9$ 答

6
章

微分法と積分法

深める

教科書 215 ページにおいて, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \cdots \cdots$ ①

が成り立つことを確かめている。ここでは, $a < c < b$ とし, 区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ とした場合に ① が成り立つことを, 教科書 220 ページの定積分と面積 (1) を利用して確かめてみよう。

指針 定積分と図形の面積(1)

$\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ のそれぞれが表す面積に着目する。

解答 区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた

部分の面積 S は $S = \int_a^b f(x)dx$

また, 区間 $a \leq x \leq c$ で $f(x) \geq 0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=c$ で囲ま

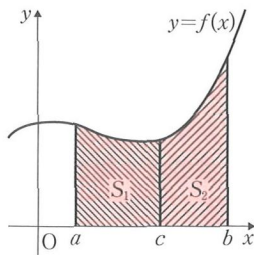
れた部分の面積 S_1 は $S_1 = \int_a^c f(x)dx$

さらに, 区間 $c \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=c$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_c^b f(x)dx$$

$S = S_1 + S_2$ であるから

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{終}$$



練習 40

次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

(2) $y = x^2 - 2x$

指針 定積分と図形の面積(2) グラフをかいてどの部分の面積か確認してから公式を使う。

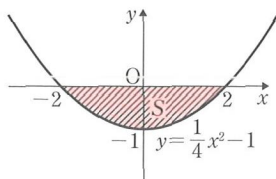
放物線と x 軸の交点の x 座標が, 定積分の下端と上端となり, その範囲では $y \leq 0$ である。

解答 (1) この放物線と x 軸の交点の x 座標は, 方

程式 $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$ を解いて

$$x = -2, 2$$

$-2 \leq x \leq 2$ では $y \leq 0$ であるから, 求める面



積 S は

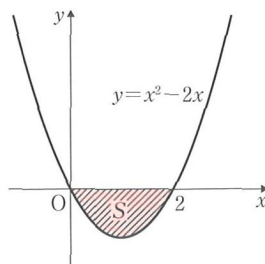
$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \left\{ -\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \right\} dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{12} + x \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{2^3}{12} + 2 \right) - \left\{ -\frac{(-2)^3}{12} - 2 \right\} \\
 &= \frac{8}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

- (2) この放物線と x 軸の交点の x 座標は、方程式 $x^2 - 2x = 0$ を解いて

$$x = 0, 2$$

$0 \leq x \leq 2$ では $y \leq 0$ であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{ -(x^2 - 2x) \} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\
 &= \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 = \frac{4}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



C 2つの曲線の間の面積

練習
41

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

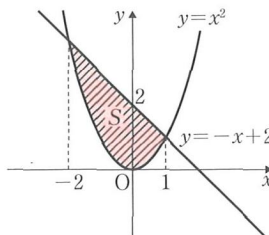
- (1) $y = x^2$, $y = -x + 2$
- (2) $y = -x^2 + 3$, $y = 2x$
- (3) $y = -x^2 + 3x$, $y = x^2 - x - 6$

教 p.223

指針 放物線と直線で囲まれた部分の面積 放物線と直線の上下関係を調べ、公式を使う。なお、その交点の x 座標は、放物線の式と直線の式から y を消去して得られる2次方程式の解であり、それが定積分の下端と上端になる。

- 解答** (1) 方程式 $x^2 = -x + 2$ を解くと、
 $x^2 + x - 2 = 0$ から $x = -2, 1$
 よって、求める面積 S は、図から

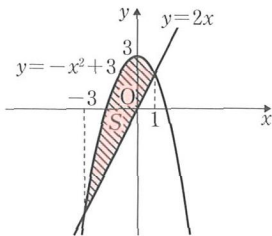
$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 \{ (-x + 2) - x^2 \} dx \\
 &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\
 &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{9}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

6
章

微分法と積分法

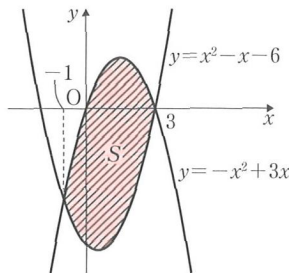
- (2) 方程式 $-x^2+3=2x$ を解くと、
 $x^2+2x-3=0$ から $x=-3, 1$
 よって、求める面積 S は、図から

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^1 \{(-x^2+3)-2x\}dx \\
 &= \int_{-3}^1 (-x^2-2x+3)dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 \\
 &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



- (3) 方程式 $-x^2+3x=x^2-x-6$ を解くと、
 $x^2-2x-3=0$ から $x=-1, 3$
 よって、求める面積 S は、図から

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^3 \{(-x^2+3x)-(x^2-x-6)\}dx \\
 &= \int_{-1}^3 (-2x^2+4x+6)dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 \\
 &= \left(-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right) - \left\{ -\frac{2}{3}(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \right\} \\
 &= \frac{64}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



D いろいろなグラフと面積の和

練習 42

次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$y = x^3 - x^2 - 2x$$

教 p.224

指針 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積の和 曲線の概形を調べ、曲線と x 軸との交点の x 座標を求める。次に、 $f(x) \geq 0$ の部分と $f(x) \leq 0$ の部分に分けて、面積を計算する。曲線の概形を調べるとき、本問は 3 次関数のグラフであり、 x 軸と交わる 3 点の座標がすぐわかるから、微分を利用して増減を調べるほど正確なものでなくてもよい。

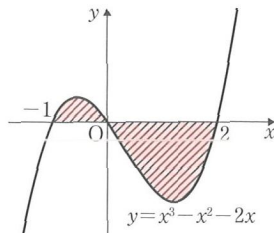
解答 曲線 $y = x^3 - x^2 - 2x$ と x 軸の交点の x 座標は、
 方程式 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ の解である。

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

から $x = -1, 0, 2$

よって、グラフは図のようになり



$$-1 \leq x \leq 0 \text{ で } y \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ で } y \leq 0$$

したがって、求める面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 \{-(x^3 - x^2 - 2x)\} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \\ &= 0 - \left\{ \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 \right\} + \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4 \right) \\ &= \frac{37}{12} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習
43

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^1 |x^2 - 4| dx$

(2) $\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx$

指針 絶対値を含む関数と定積分 $|f(x)|$ の形の式で、 $f(x) \geq 0$ と $f(x) \leq 0$ の部分に分けて定積分の計算をする。 $y = |f(x)|$ のグラフをかいて、グラフと x 軸の交点の x 座標を調べて求めるとよい。

解答 (1) $x \leq -2, 2 \leq x$ のとき $x^2 - 4 \geq 0$
 $-2 \leq x \leq 2$ のとき $x^2 - 4 \leq 0$

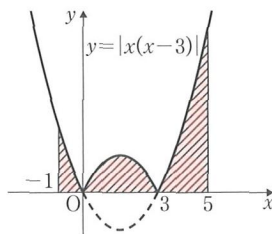
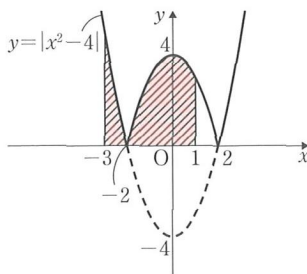
よって

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^1 |x^2 - 4| dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^2 -(x^2 - 4) dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{34}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $x \leq 0, 3 \leq x$ のとき $x(x-3) \geq 0$
 $0 \leq x \leq 3$ のとき $x(x-3) \leq 0$

よって

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx \\ &= \int_{-1}^0 x(x-3) dx + \int_0^3 -x(x-3) dx + \int_3^5 x(x-3) dx \end{aligned}$$



教 p.225

6
章

微分法と積分法

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^5 (x^2 - 3x) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^5 \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) + \left(-9 + \frac{27}{2} \right) - 0 + \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} \right) - \left(9 - \frac{27}{2} \right) \\
&= 15 \quad \text{答}
\end{aligned}$$

絶対値つきの関数の
グラフは x 軸の下側の部
分を折り返すといいよ。



研究 曲線と接線で囲まれた部分の面積

練習 1

曲線 $y = x^3 + x^2 - 2x$ と、その曲線上の点 $(1, 0)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

教 p.226

指針 曲線と接線で囲まれた部分の面積 まず接線の方程式を求める。次に曲線と接線の位置関係を図示してとらえる。

解答 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ とすると、点 $(1, 0)$ における接線の傾きは $f'(1)$ である。

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \text{ であるから } f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 3$$

$$\text{よって、接線の方程式は } y = 3(x - 1) \text{ すなわち } y = 3x - 3$$

曲線 $y = f(x)$ と接線 $y = 3x - 3$ の共有点の x 座標を求める。

方程式 $x^3 + x^2 - 2x = 3x - 3$ を整理すると

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

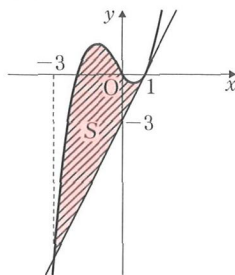
左辺を因数分解すると $(x - 1)^2(x + 3) = 0$

これを解くと $x = 1, -3$

点 $(1, 0)$ における接線が曲線 $y = f(x)$ と交わる点の x 座標は -3 であり、グラフは図のようになる。

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-3}^1 \{(x^3 + x^2 - 2x) - (3x - 3)\} dx \\
&= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{64}{3} \quad \text{答}
\end{aligned}$$



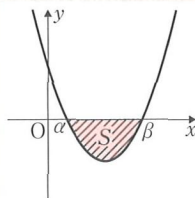
研究 放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

まとめ

放物線と面積

放物線 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($a>0$, $\alpha<\beta$) と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\} dx = \frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

練習
1

放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 x 軸との交点の x 座標を求める。

解答 放物線と x 軸の交点の x 座標は、 $-x^2+6x-7=0$ を解いて

$$x=3\pm\sqrt{2}$$

$$\alpha=3-\sqrt{2}, \beta=3+\sqrt{2} \text{ とすると}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2+6x-7) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$(\beta-\alpha)^3 = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2} \text{ であるから } S = \frac{16\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$

教 p.227

6
章

微分法と積分法

第6章 第3節

問題

教 p.228

- 14 曲線 $y=f(x)$ は点 $(1, 2)$ を通り、その曲線上の各点 (x, y) における接線の傾きは $2x+1$ で表される。この曲線の方程式を求めよ。

指針 不定積分の利用と関数の決定 曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x, y) における接線の傾きは $f'(x)$ で表される。問題より、関数 $y=f(x)$ が満たす2つの条件を求め、その条件を満たす $f(x)$ を決定する。

解答 曲線 $y=f(x)$ は点 $(1, 2)$ を通るから

$$2=f(1) \quad \text{すなわち} \quad f(1)=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

曲線 $y=f(x)$ の点 (x, y) における接線の傾きは $2x+1$ で表されるから

$$f'(x)=2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から} \quad f(x)=\int (2x+1)dx=x^2+x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

これに $x=1$ を代入すると

$$f(1)=1^2+1+C=C+2$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } C+2=2 \text{ から} \quad C=0$$

よって、この曲線の方程式は $y=x^2+x$ **答**

教 p.228

- 15 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 (3x-1)^2 dx \quad (2) \int_{-2}^1 (t+2)(t-1) dt \quad (3) \int_0^2 |x^2+x-2| dx$$

指針 定積分の計算

(1) 関数の式を展開してから積分する。

(2) t を変数とする関数の定積分。 x の場合と同様に行う。

または $\int_a^b a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$ にあてはめて求めることもできる。

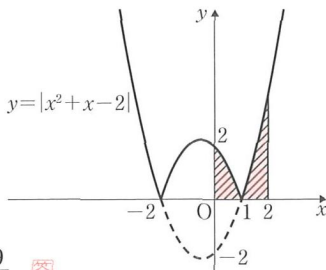
(3) $|f(x)|$ の形の式で、 $f(x) \geq 0$ と $f(x) \leq 0$ の部分に分けて、絶対値のない式にして定積分の計算をする。グラフで積分区間を確認する。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad (1) \int_{-1}^1 (3x-1)^2 dx &= \int_{-1}^1 (9x^2-6x+1)dx = \left[3x^3-3x^2+x \right]_{-1}^1 \\ &= (3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1) - \{ 3 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) \} \\ &= (3-3+1) - (-3-3-1) = 8 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \int_{-2}^1 (t+2)(t-1)dt = \int_{-2}^1 (t^2+t-2)dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_{-2}^1 \\
 &= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) - \left\{ \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2) \right\} = -\frac{9}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &\int_0^2 |x^2 + x - 2| dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \\
 &= \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



別解 (2) $\int_{-2}^1 (t+2)(t-1) dt = -\frac{1 \cdot \{1 - (-2)\}^3}{6} = -\frac{9}{2} \quad \text{答}$

教 p.228

16 次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

(2) $y = x(x+2)^2$, x 軸

指針 2つのグラフで囲まれた部分の面積 2つのグラフが交わる2点と、その2点間でのグラフの上下関係が、教科書 p.222 の公式の適用のポイントとなる。グラフをかいて視覚的にとらえるとよい。

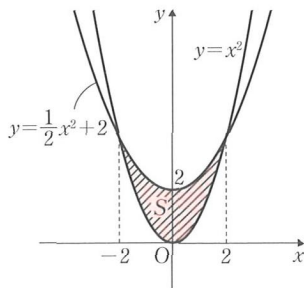
解答 (1) 2つの放物線の交点の x 座標は、

$$x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ を解いて}$$

$$x = -2, 2$$

よって、求める面積 S は、図から

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - x^2 \right\} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + 2x \right]_{-2}^2 \\
 &= \left(-\frac{2^3}{6} + 2 \cdot 2 \right) - \left\{ -\frac{(-2)^3}{6} + 2 \cdot (-2) \right\} = \frac{16}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



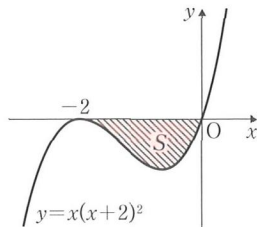
(2) 曲線 $y = x(x+2)^2$ と x 軸との共有点の x 座標は、

$$x(x+2)^2 = 0 \text{ を解いて}$$

$$x = 0, -2 \text{ (重解)}$$

よって、求める面積 S は、図から

$$S = \int_{-2}^0 \{-x(x+2)^2\} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^0 (-x^3 - 4x^2 - 4x) dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \\
&= 0 - \left\{ -\frac{(-2)^4}{4} - 4 \cdot \frac{(-2)^3}{3} - 2 \cdot (-2)^2 \right\} \\
&= 0 - \left(-4 + \frac{32}{3} - 8 \right) = \frac{4}{3} \quad \text{答}
\end{aligned}$$

コラム グラフの対称性を利用した定積分

教 p.228

練習

$y = x^3 + x^2 + x + 3$ のグラフは原点や y 軸に関して対称ではないが、
 $\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + x + 3) dx$ の計算において下の ① の公式を利用して、計算を簡単にできる。どのように利用すればよいか考えてみよう。

指針 グラフの対称性と定積分 n を 0 または正の整数として

$$\int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx, \quad \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

が成り立つ。

解答

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + x + 3) dx \\
&= \int_{-2}^2 x^3 dx + \int_{-2}^2 x^2 dx + \int_{-2}^2 x dx + \int_{-2}^2 3 dx \\
&= 2 \int_0^2 (x^2 + 3) dx \\
&= 2 \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^2 \\
&= \frac{52}{3} \quad \text{終}
\end{aligned}$$

第6章 章末問題A

教 p.229

1. 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (2x+1)(1-x^2)$

(2) $y = (x-2)(x^2+2x+4)$

指針 関数の微分 右辺を展開してから微分する。

解答 (1) $(2x+1)(1-x^2) = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

よって $y = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

したがって $y' = -6x^2 - 2x + 2$ 答

(2) $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$

よって $y = x^3 - 8$

したがって $y' = 3x^2$ 答

教 p.229

2. 曲線 $y = x^3 - 4x^2$ 上の点 A(3, -9) における接線を ℓ とする。(1) ℓ の方程式を求めよ。(2) この曲線の接線には、 ℓ に平行なもう 1 本の接線がある。その接点 B の x 座標を求めよ。指針 接線の方程式 (1) $f(x) = x^3 - 4x^2$ とすると、 ℓ の傾きは $f'(3)$ (2) ℓ に平行な接線の傾きも $f'(3)$ である。したがって、接点 B の x 座標は、 $f'(x) = f'(3)$ を満たす。解答 (1) $f(x) = x^3 - 4x^2$ とすると、接線 ℓ の傾きは $f'(3)$ である。

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \text{ から } f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 3$$

よって、 ℓ は点 A(3, -9) を通り傾きが 3 の直線である。

したがって、その方程式は

$$y - (-9) = 3(x - 3)$$

すなわち $y = 3x - 18$ 答

(2) ℓ に平行な接線の傾きは 3 に等しいから、接点 B の x 座標は

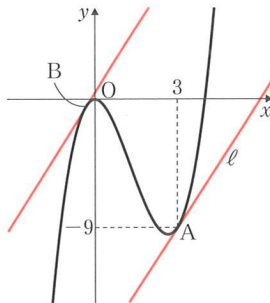
$$3x^2 - 8x = 3$$

を満たす。これを解くと

$$(x-3)(3x+1) = 0 \text{ から } x = 3, -\frac{1}{3}$$

3 は点 A の x 座標であるから、点 B の x 座

標は $-\frac{1}{3}$ 答

6
章

微分法と積分法

3. 関数 $y=x^2(x-a)$ の増減を次の各場合について調べ、極大値があればその極大値を求めよ。ただし、 a は定数とする。

(1) $a > 0$ (2) $a = 0$ (3) $a < 0$

指針 関数の極大値 $a \neq 0$ のとき、 $y' = 0$ を解くと一方の解は定数 a を含む。 a の正負により、それぞれ増減表を作り、極大値を求める。

解答 $y = x^3 - ax^2$ であるから

$$y' = 3x^2 - 2ax = 3x\left(x - \frac{2}{3}a\right)$$

$y' = 0$ を解くと $x = 0, \frac{2}{3}a$

- (1) $a > 0$ のとき、 y の増減表は次のようになる。

x		0		$\frac{2}{3}a$	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって、この関数は、 $x = 0$ で極大値 0 をとる。 **答**

- (2) $a = 0$ のとき $y' = 3x^2$

y の増減表は次のようになる。

x		0	
y'	+	0	+
y	↗	0	↗

よって、 y は常に増加し、極大値はない。 **答**

- (3) $a < 0$ のとき、 y の増減表は次のようになる。

x		$\frac{2}{3}a$		0	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗

$$x = \frac{2}{3}a \text{ のとき } y = \left(\frac{2}{3}a\right)^2\left(\frac{2}{3}a - a\right) = -\frac{4}{27}a^3$$

よって、この関数は、 $x = \frac{2}{3}a$ で極大値 $-\frac{4}{27}a^3$ をとる。 **答**

4. 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が、 $x = 1$ で極大値 5 をとり、 $x = 3$ で極小値 1 をとるように、定数 a, b, c, d の値を定めよ。

指針 極値から関数の決定 $x=1$ で極大値 5 をとるとき $f'(1)=0, f(1)=5$

また, $x=3$ で極小値 1 をとるとき $f'(3)=0, f(3)=1$

それぞれ a, b, c, d の式で表し, 連立方程式を作る。

これを解いて得られる a, b, c, d の値は, 必要条件から求めたものであるから, 最後に増減表を作り, 問題に適することを確認する。

解答 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を微分すると $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 5 をとるとき $f'(1)=0, f(1)=5$

$$\text{よって } 3a+2b+c=0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$a+b+c+d=5 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$f(x)$ が $x=3$ で極小値 1 をとるとき $f'(3)=0, f(3)=1$

$$\text{よって } 27a+6b+c=0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$27a+9b+3c+d=1 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{④}-\text{②} \text{ から } 26a+8b+2c=-4$$

$$\text{すなわち } 13a+4b+c=-2 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$\text{①, ③, ⑤} \text{ を解くと } a=1, b=-6, c=9$$

$$\text{よって, ② から } d=1$$

$$\text{このとき } f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

であるから, 次の増減表が得られ, 問題に適している。

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大 5	$\searrow$	極小 1	$\nearrow$

したがって $a=1, b=-6, c=9, d=1$ 答

$$\leftarrow \begin{cases} (\text{③}-\text{①}) \div 4 \text{ から} \\ 6a+b=0 \\ (\text{⑤}-\text{①}) \div 2 \text{ から} \\ 5a+b=-1 \end{cases}$$

6 章

微分法と積分法

教 p.229

5. 関数 $y=x^3-x+1$ のグラフと直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点で交わるように, 定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 微分法の方程式への応用 2 つのグラフが異なる 3 点で交わるのは, 方程式 $x^3-x+1=2x+a$ が異なる 3 個の実数解をもつときである。このとき, この方程式を $x^3-3x+1=a$ と変形し, 左辺を $f(x)$ とすると, 関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 点で交われればよい。

解答 $y=x^3-x+1$ のグラフと直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点で交わるのは方程式

$$x^3-x+1=2x+a \quad \cdots \cdots \text{①}$$

が異なる 3 個の実数解をもつときである。

$$\text{①} \text{ を変形すると } x^3-3x+1=a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$f(x)=x^3-3x+1$ とおくと, ② が異なる 3 個の実数解をもつことより, $y=f(x)$

のグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる。

ここで、 $y=f(x)$ のグラフを調べる。

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

であるから、 $y'=0$ とすると $x=-1, 1$

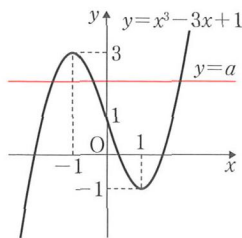
y の増減表は次のようになる。

x		-1		1	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって、 $y=x^3-3x+1$ のグラフは図のようになる。

求める a の値の範囲は、このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる範囲であるから

$$-1 < a < 3 \quad \text{答}$$



教 p.229

6. 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^2 (2x-3)^2 dx$$

$$(2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t^2-2) dt$$

指針 定積分の計算

(1) 関数を展開してから積分する。

(2) t を変数とする関数でも計算は x のときと同じ。

$$\begin{aligned} \text{解答 } (1) \int_{-2}^2 (2x-3)^2 dx &= \int_{-2}^2 (4x^2 - 12x + 9) dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{32}{3} - 24 + 18 \right) - \left(-\frac{32}{3} - 24 - 18 \right) = \frac{172}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t^2-2) dt &= \left[\frac{t^3}{3} - 2t \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) = -\frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.229

7. 等式 $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

指針 定積分と関数の決定 $\int_0^1 f(t) dt$ は x に無関係な定数である。これを a とすると、

$$f(x) = x^2 + 2a \text{ と表され、} \int_0^1 (t^2 + 2a) dt = a \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{解答 } \int_0^1 f(t) dt = a \text{ (定数) とすると } f(x) = x^2 + 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに $f(t)=t^2+2a$ よって $\int_0^1 (t^2+2a)dt=a$ …… ②

ここで $\int_0^1 (t^2+2a)dt=\left[\frac{t^3}{3}+2at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2a$

② から $\frac{1}{3}+2a=a$ すなわち $a=-\frac{1}{3}$

したがって、① から $f(x)=x^2-\frac{2}{3}$ 答

教 p.229

8. 関数 $f(x)=\int_1^x (t-1)(t-2)dt$ の極大値を求めよ。

指針 定積分と導関数(極値) 次のことを使って、導関数 $f'(x)$ を求める。

a を定数とすると、 x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である。

解答 $f(x)=\int_1^x (t-1)(t-2)dt$ を微分すると $f'(x)=(x-1)(x-2)$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	1	……	2	……
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は

$$f(1)=\int_1^1 (t-1)(t-2)dt=0$$

$$\leftarrow \int_a^a f(x)dx=0$$

したがって、 $f(x)$ は $x=1$ で極大値 0 をとる。 答

教 p.229

9. 放物線 $y=x^2-3x$ と次の 2 直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=0, y=4$

(2) $y=2x, y=-x$

指針 放物線と直線で囲まれた部分の面積 グラフをかいてどの部分の面積か確認する。求める部分は、1つの図形ではあるが、その面積を求めるには2つの部分の面積の差や和を考える必要がある。

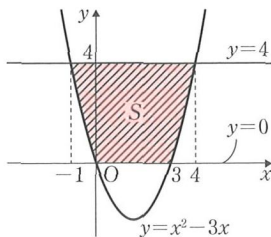
解答 (1) この放物線と直線 $y=0, y=4$ の交点の

x 座標は、それぞれ

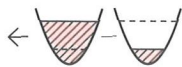
$x^2-3x=0$ を解いて $x=0, 3$

$x^2-3x=4$ を解いて $x=-1, 4$

よって、求める面積 S は、図から



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^4 \{4 - (x^2 - 3x)\} dx - \int_0^3 \{-(x^2 - 3x)\} dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^4 - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\
 &= \left(-\frac{64}{3} + 24 + 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right) - \left(-9 + \frac{27}{2} \right) + 0 = \frac{49}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



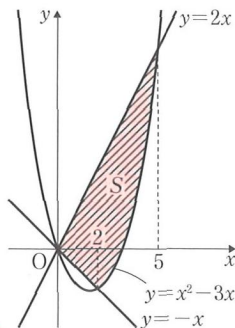
- (2) この放物線と直線 $y=2x$, $y=-x$ の交点の x 座標は, それぞれ

$$x^2 - 3x = 2x \text{ を解いて } x=0, 5$$

$$x^2 - 3x = -x \text{ を解いて } x=0, 2$$

よって, 求める面積 S は, 図から

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{2x - (-x)\} dx + \int_2^5 \{2x - (x^2 - 3x)\} dx \\
 &= \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 \right]_2^5 \\
 &= 6 - 0 + \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} + 10 \right) = \frac{39}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



別解 (2) $S = \int_0^5 \{2x - (x^2 - 3x)\} dx - \int_0^2 \{-x - (x^2 - 3x)\} dx$

$$= \frac{39}{2} \quad \text{答}$$

第6章 章末問題B

教 p.230

10. 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx$ が常に増加するように、定数 k の値の範囲を定めよ。

指針 関数が常に増加する条件 関数 $f(x)$ が常に増加するための条件は、すべての実数 x について $f'(x) \geq 0$ となることである。

解答 関数 $f(x)$ について、常に $f'(x) \geq 0$ であれば、 $f(x)$ は常に増加する。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k$$

$3x^2 + 6x + k \geq 0$ が常に成り立つのは、2次方程式

$$3x^2 + 6x + k = 0$$

の判別式 D について $D \leq 0$ のときである。

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 3 \cdot k \text{ から } 9 - 3k \leq 0$$

これを解いて $k \geq 3$ 答

別解 関数 $f(x)$ について、常に $f'(x) \geq 0$ であれば、 $f(x)$ は常に増加する。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k = 3(x+1)^2 + k - 3$$

よって、 $3x^2 + 6x + k \geq 0$ が常に成り立つには

$$k - 3 \geq 0 \text{ すなわち } k \geq 3 \text{ 答}$$

教 p.230

11. k は定数とする。 $x \geq 0$ のとき、不等式 $x^3 - 6x^2 + k \geq 0$ が成り立つような k の値の最小値を求めよ。

指針 最小値の利用 $y = x^3 - 6x^2 + k$ として、 $x \geq 0$ のとき、 y の最小値が 0 以上となるような k の値の範囲を調べる。

解答 $y = x^3 - 6x^2 + k$ とすると

$$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$x \geq 0$ において、 y の増減表は次のようになる。

x	0	……	4	……
y'		-	0	+
y	k	$\searrow$	極小 $k - 32$	$\nearrow$

y は $x = 4$ で最小値 $k - 32$ をとる。

$$\leftarrow 4^3 - 6 \cdot 4^2 + k$$

よって、 $x \geq 0$ のとき $y \geq 0$ が成り立つような k の値の範囲は

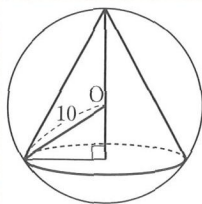
$$k - 32 \geq 0 \text{ すなわち } k \geq 32$$

したがって、 k の最小値は $k = 32$ 答

6章

微分法と積分法

12. 右の図のように、半径 10 の球に内接する直円錐^{すい}がある。このような直円錐の体積 V の最大値 V_1 と球の体積 V_2 の比を求めよ。



指針 最大・最小の応用 直円錐の高さを x とし、まず底面の円について (半径)² を x で表す。 V を x の式で表し、 x の値の範囲に注意して増減表を作る。

解答 直円錐の高さを x とする。

直円錐の底面の半径を r とし、図のような直円錐の頂点 A と球の中心 O を通る平面を考えると、 $\triangle OBH$ において三平方の定理により

$$\begin{aligned} r^2 &= BH^2 = OB^2 - OH^2 \\ &= 10^2 - (x - 10)^2 = -x^2 + 20x \end{aligned}$$

よって、直円錐の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \pi (-x^2 + 20x)x$$

$$\text{すなわち } V = \frac{1}{3} \pi x^2(20 - x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ただし、 $r^2 > 0$ より $-x^2 + 20x > 0$

これを解くと、 $x(x - 20) < 0$ から $0 < x < 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{ より } V' = \frac{\pi}{3} (40x - 3x^2) = -\pi x \left(x - \frac{40}{3} \right)$$

よって、 $\textcircled{2}$ の範囲において、 V の増減表は次のようになる。

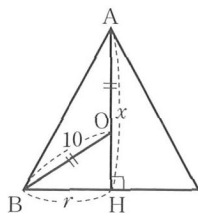
x	0		$\frac{40}{3}$		20
V'		+	0	-	
V		↗	極大	↘	

したがって、 V は $x = \frac{40}{3}$ で最大となり、最大値 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{40}{3} \right)^2 \left(20 - \frac{40}{3} \right) = \frac{32000}{81} \pi$$

一方、球の体積 V_2 は $V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = \frac{4000}{3} \pi$

$$\text{したがって } V_1 : V_2 = \frac{32000}{81} \pi : \frac{4000}{3} \pi = 8 : 27 \quad \text{答}$$



13. どのような1次関数 $f(x)$ に対しても、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

指針 定積分と不等式の証明 $f(x)=ax+b$ とおく。ただし、 $a \neq 0$ とする。不等式の両辺をそれぞれ a 、 b の式で表し、左辺-右辺 < 0 を導く。

解答 $f(x)=ax+b$ とおく。ただし、 $a \neq 0$ とする。

$$\text{このとき} \quad \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax+b) dx = \left[\frac{a}{2} x^2 + bx \right]_0^1 = \frac{a}{2} + b$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 (a^2 x^2 + 2abx + b^2) dx \\ &= \left[\frac{a^2}{3} x^3 + abx^2 + b^2 x \right]_0^1 = \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 - \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \left(\frac{a}{2} + b \right)^2 - \left(\frac{a^2}{3} + ab + b^2 \right) \\ &= \frac{a^2}{4} + ab + b^2 - \left(\frac{a^2}{3} + ab + b^2 \right) \\ &= -\frac{a^2}{12} < 0 \end{aligned} \quad \leftarrow a \neq 0$$

$$\text{したがって} \quad \left\{ \int_0^1 f(x) dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \quad \text{終}$$

14. 放物線 $y=x^2-ax$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\frac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ。

指針 放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 この放物線は、原点 $(0, 0)$ と点 $(a, 0)$ で x 軸と交わる ($a=0$ は問題の条件を満たさない)。

0 と a の大小関係によって、面積を求める定積分の下端と上端が入れかわるから注意する。 $a > 0$ と $a < 0$ に分けて考える。

解答 この放物線と x 軸の交点の x 座標は $x^2-ax=0$ を解いて

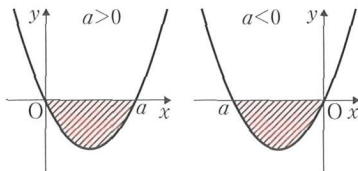
$$x=0, a$$

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

が $\frac{4}{3}$ になるから $a \neq 0$

$a > 0$ のとき

図から、 $\int_0^a (-x^2+ax) dx = \frac{4}{3}$ が成り立つ。



$$\text{ここで} \quad \int_0^a (-x^2 + ax) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6}$$

$$\text{よって} \quad \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{これを解くと} \quad a^3 = 8$$

$$\text{したがって} \quad a = 2$$

$a < 0$ のとき

$$\text{図から, } \int_a^0 (-x^2 + ax) dx = \frac{4}{3} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{ここで} \quad \int_a^0 (-x^2 + ax) dx = -\int_0^a (-x^2 + ax) dx = -\frac{a^3}{6}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{これを解くと} \quad a^3 = -8$$

$$\text{したがって} \quad a = -2$$

以上から $a = 2, -2$ 答

教 p.230

15. 放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ に原点 O から 2 本の接線を引くとき、放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 放物線と接線で囲まれた部分の面積 放物線の接線については、練習 14 を参照。それをもとにグラフをかき、放物線と接線の上下関係を調べる。 $x=0$ を境目として接線が変わることに注意する。

解答 $y = x^2 - 2x + 4$ を微分して $y' = 2x - 2$

接点の x 座標を a とすると、接線の傾きは $2a - 2$ となるから、その方程式は

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a)$$

$$\text{整理すると} \quad y = 2(a - 1)x - a^2 + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この直線が原点 $O(0, 0)$ を通るから

$$0 = -a^2 + 4$$

$$\text{よって} \quad a^2 - 4 = 0$$

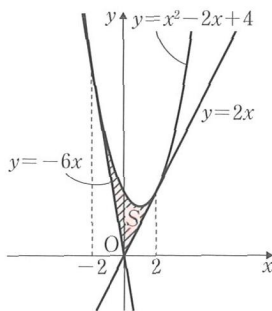
$$\text{これを解いて} \quad a = -2, 2$$

したがって、接線の方程式は、 $\textcircled{1}$ から

$$a = -2 \text{ のとき} \quad y = -6x$$

$$a = 2 \text{ のとき} \quad y = 2x$$

よって、求める面積 S は、図から



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{(x^2 - 2x + 4) - (-6x)\} dx + \int_0^2 \{(x^2 - 2x + 4) - 2x\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 4) dx + \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \end{aligned}$$

$$=0-\left(-\frac{8}{3}+8-8\right)+\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-0=\frac{16}{3} \quad \text{答}$$

研究

教 p.230

16. 曲線 $y=x^3+2x^2-3x$ と、その曲線上の点 $(-2, 6)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

指針 曲線と接線で囲まれた部分の面積 まず、点 $(-2, 6)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求め、その接線と曲線が再び交わる点の x 座標を求める。図をかいて、面積を求める部分を確認してから、面積を計算する。

解答 $f(x)=x^3+2x^2-3x$ とおき、点 $(-2, 6)$ における接線を ℓ とする。

接線 ℓ の傾きは $f'(-2)$ で、 $f'(x)=3x^2+4x-3$ から

$$f'(-2)=3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-3=1$$

よって、接線 ℓ の方程式は

$$y-6=x+2 \quad \text{すなわち} \quad y=x+8$$

曲線と接線 ℓ が交わる点の x 座標を求める。

方程式 $x^3+2x^2-3x=x+8$ を整理すると

$$x^3+2x^2-4x-8=0$$

左辺は $x+2$ を因数にもつことに着目して左辺を因数分解して

$$(x+2)^2(x-2)=0$$

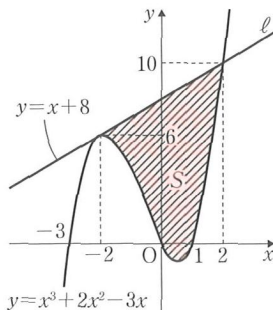
これを解くと $x=-2$ (重解), 2

よって、曲線と接線が交わる点の x 座標は

$x=2$ であり、グラフは図のようになる。

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \{(x+8) - (x^3+2x^2-3x)\} dx \\ &= \int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \\ &= \left(-\frac{2^4}{4} - 2\cdot\frac{2^3}{3} + 2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 \right) \\ &\quad - \left\{ -\frac{(-2)^4}{4} - 2\cdot\frac{(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) \right\} \\ &= \left(-4 - \frac{16}{3} + 8 + 16 \right) - \left(-4 + \frac{16}{3} + 8 - 16 \right) = \frac{64}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



6章

微分法と積分法